第20卷第4期 华东交通大学学报 Vol.20 No.4
2003年8月 Journal of East China Jiaotong University Aug., 2003

文章编号:1005—0523(2003)04—0117—04

Pell 序列和Lucas 序列的性质

周学松

(杭州商学院 统计学院,浙江 杭州 310035)

摘要:利用参考文献[2]中的引理3,给出Pell 序列和Lucas 序列的又一通项公式及一些性质,最后利用[2]中定理4证明了[7]中的猜想.

关 键 词:Pell 序列;Lucas 序列

中图分类号:TP157.5 **文献标识码**:A

1 前 言

陈景润在参考文献[1]中对Fibonacci 数作了较详细的研究,给出了许多性质.参考文献[3]中给出了广义的Fibonacci 数定义,因此

Pell 序列: $P_0=1, P_1=2, P_n=2P_{n-1}+P_{n-2} \quad (n\geqslant 2)$

Lucas 序列: $L_1=1, L_2=3, L_{n+1}=L_n+L_{n-1} \quad (n\geqslant 2)$

也就成为广义的Fibonacci 序列.对于Pell 序列和Lucas 序列的通解式很多文章作了研究,如文献[4]中对Pell 序列给出通解式:$P_n=\sum_{i+j+2k=n}(i+j+k)!\ /i!\ j!\ k!$;文献[5]中对更广泛的一类由递推关系给出的数列求得其通解式.本文利用文献[2]中的引理3分别给出Pell 序列和Lucas 序列的又一通解式,通过这些通解式,分别给出Pell 序列和Lucas 序列的一些性质.

引理1(**文献**[2]**中引理3**)设 $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$ 均为实数,则由递推关系:$U_1=C, U_{n+1}=a+b/U_n, n\geqslant 1$ 产生的数列满足:

$$\forall k\in N, U_{2k+1}\cdot U_{2k}\cdots U_1=c\sum_{j=0}^{k}C_{2k-j}^{j}\cdot a^{2k-2j}\cdot b^j+b\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k-1-j}^{j}\cdot a^{2k-1-2j}\cdot b^j$$

$$U_{2k}\cdot U_{2k-1}\cdots U_1=c\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k-1-j}^{j}\cdot a^{2k-1-2j}\cdot b^j+b\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k-2-j}^{j}\cdot a^{2k-2-2j}\cdot b^j$$

对于文献[3]中定义的广义Fibonacci 序列:

$$F_1=c_1, F_2=c_2, F_{n+1}=aF_n+bF_{n-1} \quad n\geqslant 2 \tag{1}$$

c_1, c_2, a, b 均是不为零的实数,我们有如下结果.

定理1 由(1)产生的数列其通解式为:

$$F_{2k+1}=c_2\cdot\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k-1-j}^{j}\cdot a^{2k-1-2j}\cdot b^j+c_1\cdot b\cdot\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k-2-j}^{j}\cdot a^{2k-2-2j}\cdot b^j$$

$$F_{2k+2}=c_2\cdot\sum_{j=0}^{k}C_{2k-j}^{j}\cdot a^{2k-2j}\cdot b^j+c_1\cdot b\cdot\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k-1-j}^{j}\cdot a^{2k-1-2j}\cdot b^j$$

收稿日期:2002—07—11

作者简介:周学松(1956—),男,湖北武汉人,教授.

证 由 $F_{n+1}=aF_n+bF_{n-1}\Rightarrow F_{n+1}/F_n=a+\dfrac{b}{F_n/F_{n-1}}$

令 $U_n=F_{n+1}/F_n\Rightarrow U_1=\dfrac{c_2}{c_1}=C,\ U_n=a+b/U_{n-1}\quad n\geqslant 2$，由引理 1 立即得定理 1.（毕）

推论 1 Pell 序列的通解式为：

$P_0=1,\ P_1=2,$

$$P_n=\begin{cases}2\sum\limits_{j=0}^{k-1}C_{2k-1-j}^{j}\cdot 2^{2k-1-2j}+\sum\limits_{j=0}^{k-1}C_{2k-2-j}^{j}\cdot 2^{2k-1-2j} & n=2k\\ 2\sum\limits_{j=0}^{k}C_{2k-j}^{j}\cdot 2^{2k-2j}+\sum\limits_{j=0}^{k-1}C_{2k-1-j}^{j}\cdot 2^{2k-1-2j} & n=2k+1\end{cases}\quad k=1,2,\cdots$$

推论 2：Lucas 序列的通解式为：

$L_1,L_2=3$

$$L_n=\begin{cases}3\sum\limits_{j=0}^{k-1}C_{2k-1-j}^{j}+\sum\limits_{j=0}^{k-1}C_{2k-2-j}^{j} & n=2k+1\\ 3\sum\limits_{j=0}^{k}C_{2k-j}^{j}+\sum\limits_{j=0}^{k-1}C_{2k-1-j}^{j} & n=2k+2\end{cases}\quad k=,1,2,\cdots$$

由推论 1 可得 Pell 序列的如下一些性质.

性质 1 $P_{2k}=P_{k-2}\cdot P_k+P_{k-1}\cdot P_{k+1},\ P_{2k+1}=P_{k-1}\cdot P_k+P_k\cdot P_{k+1},\ k=1,2,\cdots$

证 由推论 1 得：

$$P_{2k+1}/P_{2k}=\left(2\sum_{j=0}^{k}C_{2k-j}^{j}\cdot 4^{k-j}+\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k-1-j}^{j}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4^{k-j}\right)/\left(2\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k-1-j}^{j}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4^{k-j}+\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k-2-j}^{j}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4^{k-j}\right)\overset{\text{令}}{=\!=}\frac{A}{B}$$

一方面：$P_{2k+1}\cdot B-P_{2k}\cdot A=0$ (2)

另一方面：$A=B\cdot P_{2k+1}/P_{2k}=2B+B\cdot P_{2k-1}/P_{2k}$

$\Rightarrow B=(A-2B)\cdot P_{2k}/P_{2k-1}=2(A-2B)+(A-2B)\cdot P_{2k-2}/P_{2k-1}$

$\Rightarrow A-P_1B=A-2B=(5B-2A)\cdot P_{2k-1}/P_{2k-2}=(P_2B-P_1A)\cdot 2P_{2k-2}+P_{2k-3}/P_{2k-2}$

$\Rightarrow P_2A-P_3B=(P_2B-P_1A)\cdot P_{2k-3}/P_{2k-2}\Rightarrow P_2B-P_1A=(P_2A-P_3B)\cdot 2P_{2k-3}+P_{2k-4}/P_{2k-3}$

$\Rightarrow P_4B-P_3A=(P_2A-P_3B)\cdot P_{2k-4}/P_{2k-3}\Rightarrow P_2A-P_3B=(P_4B-P_3A)\cdot(2+P_{2k-5}/P_{2k-4})$

$\Rightarrow P_4A-P_5B=(P_4B-P_3A)\cdot P_{2k-5}/P_{2k-4}\Rightarrow\cdots\Rightarrow P_{k-1}A-P_kB=(P_{k-1}B-P_{k-2}A)\cdot P_{2k-k}/P_{2k-(k-1)}$

$\Rightarrow P_{k-1}P_{k+1}A-P_{k+1}P_kB=P_{k-1}P_kB-P_{k-2}P_kA$

$\Rightarrow(P_{k-1}P_{k+1}+P_{k-2}P_k)A-(P_{k+1}P_k+P_kP_{k-1})B=0$ (3)

由(2)(3)得证.（毕）

由性质 1 立即得：

性质 2 $P_k\mid P_{2k+1}\quad k\geqslant 1$

性质 3 $P_{2k+2}=P_k^2+P_{k+1}^2\quad k=1,2,\cdots$

证 $P_{2k+2}=2P_{2k+1}+P_{2k}=2(P_{k-1}\cdot P_k+P_k\cdot P_{k+1})+(P_{k-2}\cdot P_k+P_{k-1}\cdot P_{k+1})$

$\quad=P_k\cdot(2P_{k-1}+P_{k-2})+P_{k+1}\cdot(2P_k+P_{k-1})=P_k^2+P_{k+1}^2$

性质 4 $P_{k+1}\cdot P_{k-1}-P_k^2=(-1)^{k+1}\quad k=1,2,\cdots$

证 $k=1$ 时结论显然成立.

假设 $k=m$ 时结论成立，即 $P_{m+1}\cdot P_{m-1}-P_m^2=(-1)^{m+1}$

则 $P_{m+2}\cdot P_m-P_{m+1}^2=(2P_{m+1}+P_m)\cdot P_m-P_{m+1}^2=P_{m+1}\cdot(2P_m-P_{m+1})+P_m^2$

$\quad=P_{m+1}\cdot(-P_{m-1})+P_m^2=-(P_{m+1}\cdot P_{m-1}-P_m^2)=(-1)^{(m+1)+1}$

由归纳法得证.（毕）

性质 5 $P_{k-3}\cdot P_k-P_{k-1}\cdot P_{k-2}=2\cdot(-1)^{k+1}\quad k=3,4,\cdots$

证

$$\begin{aligned}左边&=(P_{k-1}-2P_{k-2})\cdot(2P_{k-1}+P_{k-2})-P_{k-1}P_{k-2}\\&=2P_{k-1}^2-4P_{k-1}\cdot P_{k-2}-2P_{k-2}^2=2[P_{k-1}^2-P_{k-2}\cdot(2P_{k-1}+P_{k-2})]\\&=2(P_{k-1}^2-P_{k-2}\cdot P_k)=2\cdot(-1)^{k+1}\end{aligned}$$ (毕)

由数学归纳法我们很易得:

性质6

$$P_1+P_3+\cdots+P_{2k-1}=\frac{1}{2}(P_{2k}-1)$$

$$P_2+P_4+\cdots+P_{2k}=\frac{1}{2}(P_{2k+1}-2)$$

$$P_0^2+P_1^2+\cdots+P_k^2=\frac{1}{2}P_k\cdot P_{k+1}$$

性质7　$P_{2k}-(-1)^k \mid P_{k-1}\cdot P_{2k+1}\quad k=1,2,\cdots$

证　由性质1得:

$$P_k\cdot P_{2k}=P_{k-1}\cdot P_k^2+P_{k-1}\cdot P_{k+1}\cdot P_k$$

$$P_{k-1}\cdot P_{2k+1}=P_k\cdot P_{k-1}^2+P_k\cdot P_{k-1}\cdot P_{k+1}$$

两式相减得:

$$P_k\cdot P_{2k}-P_{k-1}\cdot P_{2k+1}=P_k\cdot(P_{k-2}\cdot P_k-P_{k-1}^2)=P_k(-1)^k$$

$$\therefore P_k\cdot(P_{2k}-(-1)^k)=P_{k-1}\cdot P_{2k+1}\Rightarrow P_{2k}-(-1)^k\mid P_{k-1}\cdot P_{2k+1}$$

性质8　$P_{2k+1}\cdot P_{k-2}-P_{2k}\cdot P_{k-1}=(-1)^kP_{k+1}$

证　由性质1和性质4立即可得证.

由推论2我们可得Lucas序列的一些性质.

性质a

$$5L_{2k+1}=3L_{k+1}^2+L_k^2-2L_{k-1}^2$$

$$5L_{2k+2}=4L_{k+1}^2+3L_k^2-L_{k-1}^2$$

由性质 a 立即得:

性质b　$5\mid 3L_{k+1}^2+L_k^2-2L_{k-1}^2$

性质c　$L_k^2+L_{k+1}^2=5F_{2k+1}$.其中 F_n 为Fibonacci数

性质e　$2\mid L_{2k}+F_{2k}$

性质f　$L_{k+1}\mid L_{2k+2}+2L_{2k+1}$

最后我们用文献[2]中定理4来证明文献[7]中的猜想.

引理2(见[2]中定理4)　若 e 式 $x^2-ax-b=0$ 的根, $a\neq0,b\neq0$,

则

$$e\sum_{j=0}^{k}C_{2k-j}^{j}a^{2k-2j}b^j+b\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k-1-j}^{j}a^{2k-1-2j}b^j=e^{2k+1},k\in N$$

文献[7]中给出猜想:

$$\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k-1-j}^{j}\cdot3^{k-j}\cdot(-1)^j=\begin{cases}3, k\equiv1 \text{ or } 2(\bmod 6)\\0, k\equiv0 \text{ or } 2(\bmod 6)\\-3, k\equiv4 \text{ or } 5(\bmod 6)\end{cases}\qquad k\in N$$

证　显然$\frac{\sqrt{3}+i}{2}$,$\frac{\sqrt{3}-i}{2}$是方程 $x^2-\sqrt{3}x+1=0$ 的两个根.由引理2得:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)A-B=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{2k+1}=e^{\frac{2k+1}{6}\pi i}\tag{Ⅰ}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)A-B=\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{2k+1}=e^{-\frac{2k+1}{6}\pi i}\tag{Ⅱ}$$

其中　$A=\sum_{j=0}^{k}C_{2k-j}^{j}3^{k-j}(-1)^j$, $B=\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k-1-j}^{j}3^{k-j}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(-1)^j$

由(Ⅰ)(Ⅱ)得:　$\sqrt{3}A-2B=e^{\frac{2k+1}{6}\pi i}+e^{-\frac{2k+1}{6}\pi i}$

$$iA=e^{\frac{2k+1}{6}\pi i}-e^{-\frac{2k+1}{6}\pi i}$$

所以

$$B=\sqrt{3}\cdot\frac{e^{\frac{2k+1}{6}\pi i}-e^{-\frac{2k+1}{6}\pi i}}{2i}-\frac{e^{\frac{2k+1}{6}\pi i}+e^{-\frac{2k+1}{6}\pi i}}{2i}$$

$$=\sqrt{3}\sin\frac{2k+1}{6}\pi-\cos\frac{2k+1}{6}\pi=2\sin\frac{k}{3}\pi$$

$$\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k-1-j}^{j}\cdot 3^{k-j}\cdot(-1)^{j}=\sqrt{3}B=2\cdot\sqrt{3}\sin\frac{k}{3}\pi=\begin{cases}3, & k\equiv 1 \text{ or } 2 \pmod 6\\ 0, & k\equiv 0 \text{ or } 3 \pmod 6\\ -3, & k\equiv 4 \text{ or } 5 \pmod 6\end{cases}$$

同理对文献[7]中定理 4，定理 5 的结果也可仿此简单证明.

参考文献：

[1] 陈景润.组合数学简介[M].天津：天津科学技术出版社，1983.

[2] 周学松等.一个通项公式在建立恒等式方面的应用[J].华东交通大学学报，2001(2)：25～27.

[3] 叶世琦.广义 Fibonacci 数列[J].数学的实践与认识，1992，1.

[4] The Problem 1776. The American Mathematical Monthly，2000，6.

[5] 赵文玲等.线性循环数列的通项公式[J].曲阜师范大学学报，1996，3.

[6] I.Tomescu. 组合学引论[M].北京：高等教育出版社，1998.

[7] 周学松等.周期数列及其应用[J].华东交通大学学报，2002，(2)：78～80.

The Properties of Pell Sequence And Lucass Sequence

ZHOU Xue-song

(Hangzhou Commercial College，Hangzhou 310035，China)

Abstract：Many properties about Pell sequence and Lucass sequence by the result in reference[2] are given the guess in refernce[7] is proven.

Key words：Pell sequence；Lucass sequess

(上接第 113 页)

Two Lower Bounds about the Signed Dominatin Number in Bipartite Graphs

FENG Li-hua，WANG Jia-bao

(School of Mathematics，Central South University Changsha 410075，China)

Abstract：Let γ_s be the signed domination number of a graph G.C. Wang and J，Mao had proved that the inequality $\gamma_s\geqslant 4(\sqrt{1+n}-1)-n$ holds for all the bipartite graphs of order n. In this paper，we will give an improvement of this result and get a new one.

Key words：Signed domination number；Lower bounds；graph theory