文章编号:1005-0523(2003)04-0121-03

随机环境干扰下非线性时间序列的非常返性分析

朱恩文, 俞政

(中南大学 数学科学与计算技术学院, 湖南 长沙 410075)

摘要:非线性时间序列的一个典型模型为: $X_{n+1} = T(X_n) + e_{n+1}$. 本文在此基础上引入随机干扰, 建立 RENLAR 时序模型: $X_{n+1} = T(X_n) + e_{n+1}(Z_n)$. 利用一般状态空间的 Markov 链理论, 建立该模型为非常返的充分条件.

关键词:非常返; 随机环境; $\mu_q \times \lambda$ -不可约

中图分类号: O211.6 **文献标识码:** A

1 引言

众所周知, NLAR 的时序模型:

$$X_{n+1} = T(X_n) + e_{n+1} \quad (1.1)$$

其中 $T: R^q \rightarrow R^q$ 为 Borel 可测映射, $\{e_n\}$ 是 q 维向量的白噪声序列, $\{e_n\}$ 为 $i.i.d.$ 并有严格正的密度函数 $f(t) > 0, \forall t \in R^q$. 满足:

$$\begin{cases} Ee_n = 0 \\ e_n \text{ 与 } \{X_s, s < n\} \text{ 相互独立.} \end{cases}$$

是一类应用广泛的时序模型, 许多作者已深入地探讨了此类模型的多重性质(参阅[2]).

然而, 包括模型(1.1)在内的这类干扰为单一白噪声序列的模型有其明显的局限性: 系统的干扰没有受到环境的影响, 但一般而言, 对系统的干扰是要受到环境影响的, 当环境有明显变化时, 干扰就会从一个白噪声变为另一个白噪声. 鉴于这种考虑, 本文所讨论的 RENLAR 时序模型更好地拟合了动力系统受随机环境干扰的现象. 关于 RENLAR 时序模型已经有学者做了相关的探讨和分析(参阅[1]). 本文在此基础上借助一般状态空间上的 Markov 链理论对 RENLAR 时序模型进行了非常返性分析, 建立了该模型为非常返的充分条件.

2 RENLAR 模型和若干结果

我们首先给出 RENLAR 时序模型的定义:

设 (Ω, F, P^*) 是一个概率空间, R^q 表示 q 维空间, β_q 记 R^q 中的由 Borel 集组成的 σ 代数, μ_q 为 (R^q, β_q) 上的 Lebesgue 测度, $E = \{1, 2, \dots, m\}$ 为一有限集合, F 表示 E 中的所有子集组成的 σ -代数. 令 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 是一个定义在 (Ω, F, P^*) 上以 (E, F) 为状态空间的不可约, 非周期时齐 Markov 链, 其转移概率为 $p_{ij} = P^*(Z_{n+1} = j | Z_n = i), \forall i, j \in E$. $\{e_n(1)\}, \dots, \{e_n(m)\}$ 是 m 个定义在 (Ω, F, P^*) 上, 以 (R^q, β_q) 为状态空间的 $i.i.d.$ 随机向量序列, 它们相互独立, 且 $\forall i \in E, \{Z_n\}$ 与 $\{e_n(i)\}$ 相互独立. 令 $e_n(z_n) = \sum_{i=1}^m \{e_n(i)\} I_{(i)}(Z_n)$ 其中 $I_i(Z_n)$ 为单点集 $\{i\}$ 的示性函数.

考虑由下面方程所确定的序列 $\{(X_n, Z_n)\}$:

$$\begin{cases} X_{n+1} = T(X_n) + e_{n+1}(Z_{n+1}) \\ X_0 \in R^q \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $T: R^q \rightarrow R^q$ 为 Borel 可测映射, 且在有界集上为模有界, 我们假定:

$$\begin{cases} Z_{n+1} \text{ 及 } e_{n+1}(i) \quad (\forall i \in E) \text{ 均与 } \{X_s, s \leq n\} \text{ 相互独立} \\ Ee_n(i) = 0, E|e_n(i)| < +\infty, (\forall i \in E) \end{cases}$$

收稿日期: 2003-03-01

中国知网 <http://www.cnki.net> 中南大学硕士

引理 2.1^[1] 设 $\{X_n\}$ 是由 (2.1) 式所确定的非线性时间序列, 则 $\{(X_n, Z_n)\}$ 是一个以 $(R^q \times E, \beta_q \times F)$ 为状态空间的齐次 Markov 链.

证明 $\forall \Lambda \in \beta_q, j \in E$, 以及 $x, x_k (0 \leq k < n) \in R^q, i, i_k (0 \leq k < n) \in E$

$$\begin{aligned} & p^*(X_{n+1} \in \Lambda, Z_{n+1} = j | X_n = x, Z_n = i, X_k = x_k, Z_k = i_k, 0 \leq k < n) \\ &= p^*(T(X_n) + e_{n+1}(Z_{n+1}) \in \Lambda, Z_{n+1} = j | X_n = x, Z_n = i, X_k = x_k, Z_k = i_k, 0 \leq k < n) \\ &= p^*(T(x) + e_{n+1}(j) \in \Lambda, Z_{n+1} = j | Z_n = i) \\ &= p_{ij} p^*(T(x) + e_{n+1}(j) \in \Lambda) \\ & p^*(X_{n+1} \in \Lambda, Z_{n+1} = j | X_n = x, Z_n = i) \\ &= p^*(T(x) + e_{n+1}(j) \in \Lambda, Z_{n+1} = j | Z_n = i) \\ &= p_{ij} p^*(T(x) + e_{n+1}(j) \in \Lambda) \end{aligned}$$

所以, $\{(X_n, Z_n)\}$ 是一个 Markov 链, 再由 $e_n(j)$ 是平稳的可知 $\{(X_n, Z_n)\}$ 是时齐的, 故引理得证. 由 $\{Z_n\}$ 是不可约可知, 对任意一个定义在 (E, F) 上找的测度 λ , $\{Z_n\}$ 是 λ -不可约的. 同样可以在可测空间 (R^q, β_q) 上找到一个 Lebesgue 测度 μ_q , 使得在乘积可测空间 $(R^q \times E, \beta_q \times F)$ 上诱导出一个乘积测度 $\mu_q \times \lambda$.

$$\begin{aligned} & \forall (x, i) \in R^q \times E, \Lambda \times \{j\} \in \beta_q \times F, \text{ 令} \\ & p((x, i), \Lambda \times \{j\}) = p_{ij} p^*(T(x) + e_{n+1}(j) \in \Lambda) \end{aligned} \tag{2.2}$$

则 P 为 $(R^q \times E, \beta_q \times F)$ 上一步转移概率. 若 $\forall i \in E, \{e_n(i)\}$ 有密度函数 $f_i(t), t \in R^q$ 则由 (2.2) 得

$$\begin{aligned} & P((x, i), \Lambda \times \{j\}) = p_{ij} \int_{\Lambda} f_j(y - T(x)) \mu_q(dy) \\ \text{对于 } \forall n \geq 2, & p^{(n)}((x, i), \Lambda \times \{j\}) = \sum_{k_1 \in E} \dots \sum_{k_{n-1} \in E} p_{ik_1} \dots \\ & \dots p_{k_{n-1}j} \int_{R^q} f_{k_1}(y_1 - T(x)) \mu_q(dy_1) \int_{R^q} \dots \\ & \int_{R^q} f_{k_{n-1}}(y_{n-1} - T(y_{n-2})) \mu_q(dy_{n-1}) \int_{\Lambda} f_j(y_n - T(y_{n-1})) \mu_q(dy_n) \end{aligned} \tag{2.3}$$

为 (x, i) 到 $\Lambda \times \{j\}$ 的 n 步转移概率.

引理 2.2^[1] 设 $\forall i \in E, \{e_n(i)\}$ 有正的密度函数 f_i , 即 $\forall t \in R^q, f_i(t) > 0$

则 $\{(X_n, Z_n)\}$ 是 $\mu_q \times \lambda$ -不可约和非周期的.

证明 任取 $\Lambda \times \{j\} \in \beta_q \times F, \mu_q \times \lambda(\Lambda \times \{j\}) > 0, \forall (x, i) \in R^q \times E$. 由 $\{Z_n\}$ 是不可约的, 知 $\exists n > 0$, 使得 $p_{ij}^{(n)} > 0$ 于是 $\exists k_l \in E, l = 1, 2, \dots, n-1$, 使

$$p_{ik_1} \dots p_{k_{l-1}k_l} p_{k_l j} > 0 \tag{2.4}$$

由 (2.4) 得

$$\begin{aligned} & p^{(n)}((x, i), \Lambda \times \{j\}) \\ & \geq p_{ik_1} \dots p_{k_{n-1}j} \int_{R^q} f_{k_1}(y_1 - T(x)) \mu_q(dy_1) \int_{R^q} \dots \\ & \int_{R^q} f_{k_{n-1}}(y_{n-1} - T(y_{n-2})) \mu_q(dy_{n-1}) \int_{\Lambda} f_j(y_n - T(y_{n-1})) \mu_q(dy_n) > 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

故 $\{(X_n, Z_n)\}$ 是 $\mu_q \times \lambda$ -不可约的. 由于 $\{Z_n\}$ 是非周期的. 故知 $\exists l > 0$, 使得当 $n \geq l$ 时 $p_{ij}^{(n)} > 0 (\forall j \in E)$. 从而由 (2.3) 可知, 当 $\forall n \geq l, j \in E, p^{(n)}((x, i), \Lambda \times \{j\}) > 0$, 对任意 $(x, j) \in \Lambda \times \{j\} \mu_q \times \lambda(\Lambda \times \{j\}) > 0$ 成立, 于是由 [2] 中引理 4.1.6 可知 $\{(X_n, Z_n)\}$ 是非周期的.

3 RENLAR 模型非常返性的充分条件

首先给出一般状态空间 Markov 链非常返的充分条件, 以此作为我们分析 RENLAR 时序模型非常返的理论依据.

定理 3.1 设 $\{X_n\}$ 为状态空间 (χ, F) 上的, φ -不可约 Markov 链. 设 $A \in F^+, A^c \in F^+$, 若存在非负可测函数 $g(x)$ 满足:

$$\begin{aligned} & \int_{\chi} P(x, dy) g(y) \leq g(x), \quad x \in A^c \\ & g(x) < \inf_{y \in A} g(y), \quad x \in A^c \end{aligned}$$

则 $\{X_n\}$ 是非常返的.

注: 关于该定理的证明见 [2] 中第一章.

定理 3.2 若存在 $N > 0, a > 1$, 集合 A 以及 $(R^q \times E, \beta_q \times F)$ 上的可测函数 $V(x), V(x) = \hat{\Delta} V(x, i) (x \in R^q, i \in E)$, 若满足:

$$(i) \forall x, y \in R^q, \forall i, j \in E \quad |V(x, i) - V(y, j)| \leq N \cdot \|x - y\|$$

且 $C = \hat{\Delta} \max \{ \int_{R^q} a^{\|t\|} \cdot f_j(t) \cdot \mu_q(dt); j \in E \} < +\infty$

$$(ii) A \in \beta_q^+, A^c \in \beta_q^+ \text{ 且 } \forall i \in E, V(T(x), i) \geq V(x, i) + N \cdot \log_a C x \in A^c$$

$$V(x, i) > \sup_{y \in A} V(y, i) \quad x \in A^c$$

则由 RENLAR 时序模型所确定的序列 $\{(X_n, Z_n)\}$ 是非常返的.

证明 取 $V_1(x, i) = a^{-V(x, i)/N}$, 则 $V_1(x, i)$ 是非负可测的.

设 $X = (x, i) \in R^q \times E$ 为转移初始状态, 由 RENLAR 模型的一步转移概率的等价形式 (2.2) 式以及积分变换定理可知

$$\begin{aligned} & \int_{R^q \times E} P(X, dY) V_1(Y) \\ &= \int_{R^q} \sum_{j=1}^m P_{ij} P(T(x) + e_n(j) \in dy) V_1(y, j) \\ &\leq a^{-V(T(x), i)/N} \int_{R^q} \sum_{j=1}^m P_{ij} \cdot a^{|V(T(x), i) - V(T(x) + i, j)|/N} \cdot f_j(t) \cdot \mu_q(dt) \\ &\leq a^{-V(T(x), i)/N} \int_{R^q} \sum_{j=1}^m P_{ij} \cdot a^{\|t\|} \cdot f_j(t) \cdot \mu_q(dt) \\ &= a^{-V(T(x), i)/N} \sum_{j=1}^m P_{ij} \cdot \int_{R^q} a^{\|t\|} \cdot f_j(t) \cdot \mu_q(dt) \\ &\leq a^{-V(T(x), i)/N} C \cdot \sum_{j=1}^m P_{ij} = C \cdot a^{-V(T(x), i)/N} \end{aligned}$$

由条件(ii)即得

$$\begin{aligned} & \int_{R^q \times E} P(X, dY) V_1(Y) \leq C \cdot a^{-V(T(x), i)/N} \\ &\leq C \cdot a^{-V(x, i) - \log_a C/N} = a^{-V(x, i)/N} = V_1(x, i) \\ V_1(x, i) &= a^{-V(x, i)/N} < a^{-\sup_{y \in A} V(y, i)/N} \\ &= a^{-[\inf_{y \in A} (-V(y, i)/N)]} \\ &= a^{\inf_{y \in A} [-V(y, i)/N]} \\ &= \inf_{y \in A} a^{-V(y, i)/N} \\ &= \inf_{y \in A} V_1(y, i) \quad x \in A^c \end{aligned}$$

推论 3.2 若存在常数 $k > 0, a > 1$, 使 $C = \max \{ \int_{R^q} a^{\|t\|} \cdot f_j(t) \cdot \mu_q(dt) : j \in E \} < +\infty$, 并且当 $\|X\| > K$ 时, $\|T(x)\| \geq \|x\| + \log_a C$ 则由 RENLAR 时序模型所决定的序列 $\{(X_n, Z_n)\}$ 是非常返的.

证明 在定理 3.2 中, 取 $V(X) = \bigwedge V(X, i) =$

$\|x\|, A = \{x \in R^q : \|x\| \leq K\}$ 即得.

实例: RENLAR 时序模型 $X_{n+1} = T(x_n) + e_{n+1}(Z_{n+1})$ 其中 $T(x) = \begin{cases} T_1(x) & \text{当 } x \in D \\ Ax & \text{其它} \end{cases}$, $D \subset R^q$ 为一个有界区域, $T_1(x)$ 有界可测, A 为 $q \times q$ 的常数矩阵. 若 $A^T A$ 的最小特征值 $\lambda_{\min}(A^T A) > 1$, 存在常数 $a > 1$, 使 $C = \max \{ \int_{R^q} a^{\|t\|} \cdot f_j(t) \cdot \mu_q(dt) : j \in E \} < +\infty$ 时, 由 RENLAR 所决定的序列 $\{(X_n, Z_n)\}$ 为非常返.

证明 由于 D 为有界区域, 故当 $\|x\|$ 充分大时, $\|T(x)\| = \|Ax\| \geq \sqrt{\lambda_{\min}(A^T A)} \|x\|$, 而 $\lambda_{\min}(A^T A) > 1$, 故存在充分大的正数 K , 当存在常数 $a > 1$, 使 $C = \max \{ \int_{R^q} a^{\|t\|} \cdot f_j(t) \cdot \mu_q(dt) : j \in E \} < +\infty$ 时 $\|T(x)\| \geq \|x\| + \log_a C$, 这时由推论 3.2 知序列 $\{(X_n, Z_n)\}$ 为非常返.

参考文献:

[1] 侯振挺, 俞政. 随机环境下的非线性时间序列的分析—定义与遍历性. 待发.
 [2] 盛昭瀚, 王涛, 刘德林. 非线性时间序列模型的稳定性分析—遍历性理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 1993.
 [3] 王梓坤. 随机过程通论[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1996.

Analysis on Non-recurrent Property of Nonlinear Time Series Under the Interference of Random Environment

ZHU En-wen, YU Zheng

(School of Mathematic Sciences and Computing Techniques, Central South University, Changsha 410075, China)

Abstract: This paper tries to establish a RENLAR model $X_{n+1} = T(X_n) + e_{n+1}(Z_{n+1})$ by introducing a random interference into the typical model of nonlinear time series model $X_{n+1} = T(X_n) + e_{n+1}$. Utilizing general state space Markov chain theorem, we find the sufficient condition of RENLAR model as non-recurrent.

Key words: non-recurrence; random-environment; $\mu_q \times \lambda$ -irreducibility