

文章编号:1005-0523(2003)05-0111-02

2^r 阶循环群的最小图

周尚超

(华东交通大学,江西 南昌 330013)

摘要:构造出自同构群是 2^r 阶循环群且具有 2^r+6 个顶点的边数最少的图并证明这样的图只有一个.

关键词:图论;循环群;自同构

中图分类号:O157.6

文献标识码:A

文^[1]中提出:确定自同构群是 n 阶循环群的顶点或边数最少的所有连通图仍然是一个未解决的问题.本文构造出自同构群是 2^r ($r \geq 2$) 阶循环群且具有 2^r+6 个顶点的边数最少的图并证明这样的图只有一个.根据^[2]第14章习题14.7可知 2^r+6 是群为 2^r 阶循环群的图的最小顶点数.

引理1 设图 G 的自同构群 $\text{Aut } G = \langle f \rangle$ 是 2^r 阶循环群, G 的顶点数 $|V(G)| = 2^r+6$, 则 f 是三个不交的轮换之积,这三个轮换的长度分别是 $2^r, 4, 2$.

根据引理1,在下文中若 $\text{Aut } G = \langle f \rangle$ 是 2^r 阶群 ($r \geq 2$), $|V(G)| = 2^r+6$, 则假设

$f = (1, 2, \dots, 2^r)(a_1, a_2, a_3, a_4)(x, y)$. 设 $V_1 = \{1, 2, \dots, 2^r\}$, $V_2 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $V_3 = \{x, y\}$, V_1 和 V_2 中的点分别按模 2^r 和模4运算.用 $E(G)$ 表示 G 的边集.

定理1 设 $V(G_i) = V_i$ ($i=1, 2, 3$), 设 $G_1 = [1, 2, \dots, 2^r, 1]$ 是 2^r 边形, $|E(G_i)| = 0$ ($i=2, 3$), 设 $M(2^r)$ 是图 G_1, G_2, G_3 按下列方式邻接而得的图(图1):

1) G_i ($i=1, 2$) 的奇数顶点与 x 邻接, G_i ($i=1, 2$) 的偶数顶点与 y 邻接,

2) 设 $j \in V_1$. 若 $j \equiv 1 \pmod{4}$, 则 j 与 a_1, a_2 邻接; 若 $j \equiv 2 \pmod{4}$, 则 j 与 a_2, a_3 邻接; 若 $j \equiv 3 \pmod{4}$, 则 j 与 a_3, a_4 邻接; 若 $j \equiv 0 \pmod{4}$, 则 j 与 a_4 ,

a_1 邻接;

则 $\text{Aut } M(2^r) = \langle f \rangle$, 这里

$$f = (1, 2, \dots, 2^r)(a_1, a_2, a_3, a_4)(x, y)$$

证明 用 M 来记 $M(2^r)$. $f \in \text{Aut } M$ 是显然的. G_i 的顶点的度都是 d_i : $d_1=5, d_2=2^r-1+1, d_3=2^r-1+2$. 若 $2^r \neq 8$, 则 d_1, d_2, d_3 互不相同, 因此若 $g \in \text{Aut } M$, 则 $g(V_i) = V_i$ ($i=1, 2, 3$), 这里 $g(V_i)$ 表示集合 $\{g(u) \mid u \in V_i\}$. 设 $2^r=8$, 则 $d_1=d_2=5, d_3=6$. 图 $M(8)$ 中与1和 a_1 邻接的顶点集(连同1和 a_1)的两个导出子图分别有8条边和9条边, 这两个子图是不同构的, 这说明 $M(8)$ 的自同构不会把 V_1 的顶点映为 V_2 的顶点, 因此对 $M(8)$ 来说, 也有 $g(V_i) = V_i$. 下面证明: 若 $g(1)=1$, 则 $g=1$ (群的单位元). 设 $g(1)=1$, 根据图1以及 $g(V_i) = V_i, g(x)=x$, 因此 $g(y)=y$. 又由 $g(1)=1$, 得 $g\{a_1, a_2\} = \{a_1, a_2\}$, 因为 $g(x)=x$, 所以 $g(a_1)=a_1, g(a_2)=a_2, g(a_3)=a_3, g(a_4)=a_4$. $g(1)=1$, 得 $g(2)=2$ 或 $g(2)=2^r$, 因为 $g(a_2)=a_2$, 所以 $g(2)=2$. G_1 是一个 2^r 边形, $g(1)=1, g(2)=2$, 所以 $g(i)=i$ ($i=1, 2, \dots, 2^r$), 因此 $g=1$. 设 $g(1)=1+i$, 则 $f^{-i}g(1)=1, f^{-i}g=1, g=f^i \in \langle f \rangle, \text{Aut } M = \langle f \rangle$.

引理2 设 $\text{Aut } G = \langle f \rangle$ 是 2^r 阶循环群, $|V(G)| = 2^r+6$, 则当 $r=2$ 时, $|E(G)| \geq 18$, 当 $r \geq 3$ 时, $|E(G)| \geq 2^{r+2}+4$.

收稿日期:2003-05-27

中国知网 <https://www.cnki.net> 周尚超,男,云南蒙自人,教授.

证明 设 E_i 是 G 的两个顶点都在 V_i 边集, E_{ij} 是一个顶点在 V_i , 另一个在 V_j 的边集. 若 $[j, a_i] \in E_{12}$, 则 $f^t[j, a_i] = [f^t(j), f^t(a_i)] \in E_{12} (t=1, 2, \dots)$, 因此 $|E_{12}| = 2^r m (m=0, 1, 2, 3, 4)$. 同理

$|E_{13}| = 2^r n (n=0, 1, 2), |E_{23}| = 4t (t=0, 1, 2)$. 设 $h_1 = (1)(2, 2^r)(3, 2^r-1) \dots (2^{r-1}, 2^{r-1}+2)(2^{r-1}+1)$. 若 $m=0$ (或 4), 即 V_1 中顶点与 V_2 中顶点不邻接 (或都邻接), 则 $h_1 \in \text{Aut } G$, 矛盾. 若 $m=1$ 设 $i+4t$ 与 a_i 邻接 ($i=1, 2, 3, 4, t=1, 2, \dots$), 设 $h_2 = (a_1)(a_2, a_4)(a_3)$, 则 $h_1 h_2 \in \text{Aut } G$, 矛盾. 若 $m=3$, 则在 G 的补图中 $m=1$, 可推出矛盾, 因此 $m=2, |E_{12}| = 2^{r+1}$, 这时, 若 1 与 a_i 邻接, 则 V_2 中与 1 邻接的另一个点只可能是 a_i+1 或 a_i-1 , 若不然, 设 1 与 a_1, a_3 邻接, 则 $(a_1, a_3) \in \text{Aut } G$, 矛盾, 因此设 1 与 a_1, a_2 邻接. 设 $h_3 = (a_1, a_2)(a_3, a_4), h_4 = (x, y)$, 若 $n=0$ (或 2), 则因为 1 与 a_1, a_2 邻接, 所以 $h_1 h_3 h_4 \in \text{Aut } G$, 矛盾, 因此 $|E_{13}| = 2^r$. 若 $t=0$ (或 2), 则 $h_1 h_3 \in \text{Aut } G$, 矛盾, 因此 $|E_{23}| = 4$. 设 $|E_1| = 0, r \geq 3$, 则 $(1, 5) \in \text{Aut } G$, 矛盾, 若 $[i, j] \in E_1$, 则 $f^t[i, j] \in E_1 (t=1, 2, \dots)$, $|E_1| \geq 2^{r-1}$, 若 $|E_1| = 2^{r-1}$, 则 $E_1 = \{[i, 2^{r-1}+i] | i=1, 2, \dots, 2^r-1\}, (1, 2^{r-1}+1) \in \text{Aut } G$, 矛盾, 因此 $|E_1| \geq 2^r, |E(G)| \geq |E_1| + |E_{12}| + |E_{13}| + |E_{23}| \geq 2^{r+2} + 4$. 设 $r=2, 1$ 与 a_1, a_2 邻接, a_1 与 x 邻接, 则 1 与 x 邻接或 1 与 y 邻接, 若 1 与 x 邻接, $|E_1| + |E_2| = 0$, 则 $(1, a_1)(2, a_4)(3, a_3)(4, a_2) \in \text{Aut } G$, 矛盾, 若 1 与 y 邻接, $|E_1| + |E_2| = 0$, 则 $(1, a_2)(2, a_1)(3, a_4)(4, a_3) \in \text{Aut } G$, 矛盾, 因此 $|E_1| + |E_2| \geq 2, |E(G)| \geq 18$.

定理 2 设 $\text{Aut } G$ 是 2^r 阶循环群, $|V(G)| = 2^r + 6$, 则当 $r \geq 3$ 时, G 的最小边数是 $2^{r+2} + 4$, 当 $r=2$ 时, G 的最小边数是 18.

定理 3 自同构群是 2^r 阶循环群且具有 2^r+6 个顶点的边数最少的图只有一个.

证明 设 $\text{Aut } G = \langle f \rangle, |V(G)| = 2^r + 6$, 当 $r \geq 3$ 时, 我们证明 G 与 $M(2^r)$ 同构. 根据引理 2 的证

明, $|E_1| = 2^r$. 设 $[1, 1+i] \in E_1$, 则 $f_i[1, 1+i] = [1+i, 1+2i] \in E_1, f^i[1+i, 1+2i] = [1+2i, 1+3i] \in E_1$, 这样可得一个 k 边形 $[1, 1+i, 1+2i, \dots, 1+ki-i, 1]$, 且 E_1 是 $2^r/k$ 个不交的 k 边形的并, 这里 $2^r/k$ 是 2^r 与 i 的最大公因数. 设 $f_1 = (1, 1+i, 1+2i, \dots, 1+ki-i)$. 若 $k \neq 2^r$, 则 $k=2^s, 1 \leq s \leq r$. 若 $s=1$, 则 $k=2, |E_1| = 2^{r-1}$, 矛盾, 因此 $k \geq 4, i=0 \pmod{2}$, f_1^2 具有性质: $f_1^2(j) = j \pmod{4}$ 对任意 $j \in V_1, f_{12} \in \text{Aut } G$, 矛盾, 因此 $k=2^r, G_1 = [1, 1+i, 1+2i, \dots, 1+ki-i, 1]$ 是 2^r 边形, i 与 2^r 互素, 若将 V_1 中顶点作如下改变:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 1+i, & 1+2i, & \dots, & 1+ki-i \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 1, & 2, & 3, & \dots, & 2^r \end{array}$$

则 $G_1 = [1, 2, 3, \dots, 2^r, 1], \text{Aut } G = \langle f' \rangle = \langle f \rangle$. 根据引理 2 的证明, 可设 V_2 中与 1 邻接的顶点是 a_1, a_2, V_3 中与 a_1 邻接的顶点是 x , 这样 V_3 中顶点与 1 邻接的情形只有两种: 若 1 与 x 邻接, 则 G 就是 $M(2^r)$. 若 1 与 y 邻接, 这个图用 M' 表示. 设 $h = (1)(2, 2^r)(3, 2^r-1) \dots (a_1, a_2)(a_3, a_4)(x, y)$, 则 h 是 $M(2^r)$ 到 M' 的同构映射. 因此 G 总是与 $M(2^r)$ 同构.

当 $r=2$ 时, G 的边集如下: $E_1 = \{[1, 3], [2, 4]\}, |E_2| = 0, |E_3| = 0, E_{12} = \{[1, a_1], [1, a_2], [2, a_2], [2, a_3], [3, a_3], [3, a_4], [4, a_4], [4, a_1]\}, E_{13} = \{[1, x], [3, x], [2, y], [4, y]\}, E_{23} = \{[a_1, x], [a_3, x], [a_2, y], [a_4, y]\}$. 这是唯一的有 18 边, 10 点, 4 阶循环群的最小图.

参考文献:

- [1] Harary, F and Palmer, E. The smallest graph whose group is cyclic, Czech. Math. J. 16(1966), 70—71. Math Reviews, 33 (1967) #2563.
- [2] Harary, F., Graph Theory. Addison—Wesley, Reading, MA (1969), 中译本, 图论, 李慰萱译, 上海科学技术出版社, 1980 年.

The Smallest Graph with Cyclic Group of Order 2^r

ZHOU Shang-chao

(East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Let $\alpha(n)$ be the least number of points for which a graph has automorphism group isomorphic to $c(n)$, the cyclic group of order n . Let $\beta(n)$ represent the least number of lines a graph can have if it has $\alpha(n)$ points and automorphism group isomorphic to $c(n)$. And that there is only one graph for $c(2^r)$ with $\alpha(2^r)$ points and $\beta(2^r)$ lines is proved.

Key words: graph theory; cyclic group; automorphism