文章编号: 1005-0523(2003)05-0113-02

关于项链问题的计数公式

徐保根

(华东交通大学 基础科学学院, 江西 南昌 330013)

摘要: 设 m, n 为正整数, $f(m, n)$ 表示用 m 种颜色的珠子做成的不同 n -珠项链的数目, $g(m, n)$ 表示用 m 颗红珠和 n 颗白珠做成的不同项链的数目, 本文给出了 $f(m, n)$ 和 $g(m, n)$ 的表达式.

关键词: 项链; 二面体群; Burnside 引理; 轨道; 不动点; 计数

中图分类号: O153

文献标识码: A

项链计数是一类很有趣的问题, 虽然这一问题在不同的学科中提到, 如近世代数^[1]、组合数学^[2]、图论等, 但都没有给出明确的显式解或者计数公式. 一般说来, 项链计数是一类非常困难的问题, 例如, 分别给出各种颜色的珠子的具体数目, 由这些珠子组成的不同项链的数目等. 所谓不同 n -珠项链是指两根 n -珠项链(根据珠子的颜色)无法分辨, 即由一根项链无论如何旋转或翻转, 都不能与另一根项链(珠子的颜色)完全重合. 本文主要是给出摘要中提出的两类项链问题计数公式, 即 $f(m, n)$ 和 $g(m, n)$ 的具体表达式.

定义 1^[1] 设 X 为目标集, 一个群 G 作用于 X 上, $a \in X$, 则集合 $\Omega_a = \{g(a) \mid g \in G\}$ 称为 X 在 G 作用下的一个轨道.

显然, 由于在 X 中可以定义等价关系 $\sim$ 为: $a \sim b \Leftrightarrow \exists g \in G$ 使得 $g(a) = b$, 故 X 在群 G 作用下被划分为若干轨道的并, 且轨道数目可由下面引理给出.

引理 1^[1~2] (Burnside 引理) 设有限群 G 作用于有限集 X 上, 则 X 在群 G 作用下的轨道数目为 $N = (1/|G|) \sum_{g \in G} \chi(g)$, 其中 $\chi(g)$ 为元素 g 在 X 上的不动点数目.

定义 2^[1] 设 $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 为一个正 n 边形的顶点集, 按逆时针方向排列, 在 X 上定义两种

变换 ρ_k 和 π_k 如下: $\rho_1 = (123 \dots n)$ 为 n -轮换, $\rho_k = \rho_1^k (k=0, 1, 2, \dots, n-1)$ 称为旋转变换. 另一类变换为绕这个正 n 边形的对称轴翻转 π 角度的变换, 称为翻转变换. 由于正 n 边形的对称轴共有 n 个, 记过顶点 1 的对称轴为 l_0 , 过边 $(1, 2)$ 中点的对称轴为 $l_1, \dots$, 直到 l_{n-1} , 相应的翻转变换依次记为 $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{n-1}$, 则 $D_n = \{\rho_k, \pi_k \mid k=0, 1, 2, \dots, n-1\}$ 对变换复合运算成为一个群, 称为 n 次二面体群, 记为 D_n , 显然 $|D_n| = 2n$.

直观地看, 一根 n -珠项链(珠子标号按逆时针方向依次为 $1 \sim n$), 经过 D_n 中任何一个置换后得到同一根项链, 从而, 不同 n -珠项链的数目为所有标号(即每个珠子标一种颜色) n -珠项链集合 Ω 在 D_n 作用下不同轨道的数目.

对于一个 n 次置换 σ , 如果 σ 的标准轮换分解式是由 λ_1 个 1-轮换、 λ_2 个 2-轮换、 $\dots$ 、 λ_n 个 n -轮换组成, 则称 σ 为一个 $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} 3^{\lambda_3} \dots$ 型置换(其中 $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = n$).

对于任意正整数 x , 我们用 $\phi(x)$ 表示欧拉函数, 即为 $0, 1, 2, 3, \dots, x-1$ 中与 x 互素元素的个数.

设 m, n 为正整数, $f(m, n)$ 表示用 m 种颜色的珠子做成的不同 n -珠项链的数目, 对于二面体群 D_n 应用 Burnside 引理, 文献[1]中给出了一般表

收稿日期: 2003-05-27

作者简介: 徐保根(1963-), 男, 江西南昌人, 教授.

达式

引理 2^[1] 设 D_n 为二面体群, 则

$$f(m, n) = \frac{1}{|D_n|} \sum_{g \in D_n} m^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}$$

其中 g 为 D_n 中 $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} 3^{\lambda_3}$ 型置换.

应用这一引理, 便容易得到 $f(m, n)$ 的具体表达式:

定理 1 对任意正整数 m 和 $n, f(m, n)$ 表示用 m 种颜色的珠子做成的不同 n -珠项链的数目则有 $f(m, n) =$

$$(m^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} + m^{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor})/4 + (1/2n) \sum_{p|n} \phi(p) m^{n/p}$$

其中 $\lfloor x \rfloor$ 为不大于 x 的最大整数, $\phi(x)$ 表示欧拉函数, $\sum$ 是取遍 n 所有正因子求和.

证: 根据引理 2, 只需确定 D_n 中各种类型置换的数目. 令 $A = \{ \rho_k \in D_n \mid k=0, 1, \dots, n-1 \}$ 为 D_n 中旋转变换集, $B = \{ \pi_k \in D_n \mid k=0, 1, 2, \dots, n-1 \}$ 为 D_n 中翻转变换集. 注意到 $\rho_1 = (123 \dots n)$ 为 n -轮换, $\rho_k = \rho_1^k (k=0, 1, 2, \dots, n-1)$, 不难看出: 对于 n 的每一个正因子 p, A 中共有型 $p^{\frac{n}{p}}$ 置换个 $\phi(p)$. 又因为 $\sum_{p|n} \phi(p) = n = |A|$ ^[4], 故 A 中不存在其它类型的, 即有

$$(1/D_n) \sum_{g \in A} m^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} = (1/2n) \sum_{p|n} \phi(p) m^{\frac{n}{p}} \quad (1)$$

下面考虑 B 中的所有元素 $\pi_k (k=0, 1, \dots, n-1)$.

当 n 为奇数时; 所有 B 中的 n 个元素均 $1^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$ 为型置换, 注意到 n 为奇数, 从而有

$$\sum_{g \in B} m^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} = |B| m^{1 + \frac{n-1}{2}} = nm^{1 + \frac{n-1}{2}} = (m^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} + m^{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor}) n/2 \quad (*)$$

当 n 为偶数时; B 中有 $\frac{n}{2}$ 个 $1^2 2^{\frac{n}{2}-1}$ 型置换和 $\frac{n}{2}$

个 $2^{\frac{n}{2}}$ 型置换, 注意到 n 为偶数, 从而也有

$$\sum_{g \in B} m^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} = \frac{n}{2} m^{2 + \frac{n}{2} - 1} + \frac{n}{2} m^{\frac{n}{2}} = (m^{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor} + m^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}) n/2$$

这表明不论 n 为奇数或偶数时, $(*)$ 式均成立, 因此有

$$\frac{1}{|D_n|} \sum_{g \in B} m^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} = (m^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} + m^{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor})/4 \quad (2)$$

注意到 $D_n = A \cup B$, 根据引理 2, 将 (1) 式与 (2) 式相加, 便完成了定理 1 的证明.

定理 2 对任意正整数 m 和 $n, g(m, n)$ 表示用 m 颗红珠和 n 颗白珠做成的不同项链的数目则有

$$g(m, n) = \frac{1}{2} \left[(2m + 2n - 1 + (-1)^m)/4 \right] + \frac{1}{2(m+n)} \sum_{p|(m+n, m)} \phi(p) \binom{m+n/p}{m/p}$$

其中 $\binom{s}{t}$ 表示 s 个中取 t 个的组合数, (s, t) 表示 s 与 t 的最大公因子, $\sum$ 是取遍 $m+n$ 与 m 的最大公因子的所有正因子求和, $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数.

参考文献:

- [1] 胡冠章. 应用近世代数 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1993, 12.
- [2] Alan Tucker, Applied Combinatorics, published in Canada and USA (M) 1984.
- [3] 哈拉里. 图论 [M]. 上海: 上海科技出版社, 1980.
- [4] 柯召, 孙琦. 数论讲义 (上册) [M]. 北京: 高等教育出版社, 1987.

On the Formulas of Enumeration in Necklace Problem

XU Bao-gen

(School of Natural Science, East China Jiaotong University Nanchang, 330013, China)

Abstract: Let m and n be positive integral numbers, $f(m, n)$ denotes the numbers of necklaces that are composed of n beads with m colors, and $g(m, n)$ denotes the numbers of necklaces that are composed of m red beads and n white beads. This paper gives the expression of $f(m, n)$ and $g(m, n)$.

Key words: necklace; dihedral group; Burnside's lemma; orbit; fixed point; enumeration