

文章编号: 1005—0523(2003)05—0115—03

群决策向量方向合成法在项目评价中的应用^[1]

傅丽仙

(华东交通大学 基础科学学院, 江西 南昌 330013)

摘要:论证了群决策特征根法^[1,3]存在的缺陷,考虑到权重决策向量只与方向有关,而与大小无关,提出一种群组决策向量方向合成法,指出用该方法所确定的集结规则 H 满足公平性,其决策结果满足群组团体影响力的和最大并且是唯一的,较好地解决了该问题,最后,举例予以说明.

关 键 词:群组决策;方向合成;真实偏好;公平性;影响力

中图分类号: O224

文献标识码: A

1 群决策的特征根法^[1]及其问题

由 $S_1, S_2 \cdots S_m$ 组成的 m 个相互地位平等的专家决策系统 G , 评价 n 个对象 $B_1, B_2 \cdots B_n$, 给出这 n 个对象的相对重要性. 设 S_i 对第 j 个被评目标 B_j 的评分值记为 $x_{ij} \in (0, 1] (i=1, 2 \cdots m; j=1, 2 \cdots n$ 且 $I > 0)$, 则 S_i 的决策向量为 $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2} \cdots x_{in})^T$, x_{ij} 的值越大, 目标 B_j 的值最优. 专家的决策水平不仅取决于它的专业水平、经验、知识面和综合能力, 而且与决策时的精神状态、情绪和偏好密切相关. 所以, 现实中决策可靠性达最大值 1 (或者说决策的不确定、不可靠性达最小值 0) 的专家是不存在的. 因此, 我们假设一个评分最准 (可靠性达 100%)、最公正、即决策水平最高的专家叫做理想 (最优) 专家 S^* . 它的评分向量为

$$\mathbf{x}_i^* = (x_{i1}^*, x_{i2}^* \cdots x_{in}^*)^T \in E^n$$

由于人们总是聘请水平较高的专家参与, 故我们现实地定义理想专家为, 对被评物的认识与专家群体 G 有最高一致性的专家, 即 S^* 的决策结论与 G 的完全一致, 与专家的个体差异最小.

定义 1 具有评分向量与群体中各专家评分向量夹角之和最小专家, 称为该群体的理想 (最优) 专

家.

由上定义不难写出 $\mathbf{x}^*$ 是使函数

$$f = \sum_{i=1}^m (b^T \mathbf{x}_i)^2$$

取最大值时的向量, 式中 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \cdots b_n)^T \in E^n$, 且不失一般性, 可设 $\|\mathbf{b}\|_2 = 1$, 即

$$\max_{i=1}^m (b^T \mathbf{x}_i)^2 = \sum_{i=1}^m (\mathbf{x}^{*T} \mathbf{x}_i)^2 \quad (1)$$

为了求 $\mathbf{b}$, 文[1]中给出并证明了如下定理:

定理 1 对于任意 $\mathbf{b} \in E^n$,

$$\max_{i=1}^m (b^T \mathbf{x}_i)^2 = \sum_{i=1}^m (\mathbf{x}^{*T} \mathbf{x}_i)^2 = \rho_{\max}$$

式中, 为矩阵 $F = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$ 的最大正特征根, $\mathbf{x}^* \rho_{\max}$ 为对应于 F 的正特征向量, 且 $\|\mathbf{x}^*\| = 1$. 其中 $\mathbf{x} = x_{(j) \max}$, 即 $\mathbf{x}$ 的第 i 行为 $\mathbf{x}_i^T = (x_{i1}, x_{i1}, \cdots, x_{in}) \cdot \rho_{\max}$ 为单根, 不计比例因子情况下, $\mathbf{x}^*$ 唯一.

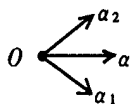
本定理给出了群体 G 对多个被评目标做评判决策的新特征根法. 这种方法求出的理想专家的评判分, 即为多个被评目标的排序. 此方法只需专家直接对各被评目标打分, 然后被评分矩阵转置自乘记为矩阵 F , F 的最大特征根对应的特征向量就是最优决策结论.

以上即为群决策的特征根法的基本内容^[1]. 下面我们看一个例子来说明定义 1 存在的问题.

收稿日期: 2002—06—04

中国期刊网 <http://www.cnki.net> 傅丽仙, 讲师.

例 1 设有两个专家组成的群决策系统, 相应的决策向量分别为 $\alpha_1, \alpha_2 \in E^n$, 如图:



易知, 从 $O(0, 0 \dots 0)$ 点出发的 α_1, α_2 , 所夹并与 α_1, α_2 分别成锐角的任一向量 α (包括 α_1, α_2) 都满足定义 1 所定义的理想专家的要求, 它们都可作为最终决策向量, 现实中这种决策结果显然是不可能达成一致或妥协的。

定理 1 之所以得出唯一性, 是因为有一个数学上的错误。文[1]认为:

设 b 为群决策向量, θ_i 为 b 与 $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T, i=1, 2, \dots, m$, 则

$$\min \sum_{i=1}^m \theta_i \quad (2)$$

与(1)式等价, 因此, 有(1)式唯一解 $b^* \Rightarrow$ (2)式亦有唯一解 b^* 。

这是错误的, 例如: 对于只有 2 个专家组成的群组决策系统, 相应决策向量分别为 $x_i = (x_{i1}, x_{i2} \dots x_{in})^T \in E^n, i=1, 2$, 则

$$(2) \text{ 式即 } \min \theta_1 + \theta_2 \Leftrightarrow \max \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\theta_1 + \theta_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\Leftrightarrow \max (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) \quad (3)$$

$$(1) \text{ 式即 } \max_{\substack{b \in E^n \\ \|b\|_2=1}} [(b^T x_1)^2 + (b^T x_2)^2] \Leftrightarrow \max$$

$$(\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2) \quad (4)$$

而(3) $\Leftrightarrow$ (4)。文[1]定理 1 得出结论是(1)有唯一最优解, 从而(2)有唯一最优解, 与例 1 结论不符, 是因为定理 1 的唯一性结论是在文[1]承认(3) $\Leftrightarrow$ (4)的错误前提下得出的。

文[2]虽然理论上有些进展, 但保留了上述定理 1 的错误前提。

2 群决策的向量方向合成法

由 $S_1, S_2 \dots S_m$ 组成的 m 个相互地位平等的专家决策系统 G , 评价 n 个对象 $B_1, B_2 \dots B_n$, 给出这 n 个对象的相对重要性。设 S_i 对第 j 个被评目标 B_j 的评分值记为 $x_{ij} \in (0, 1] (i=1, 2 \dots m; j=1, 2 \dots n$ 且 $I > 0)$, 则 S_i 的决策向量为 $x_i = (x_{i1}, x_{i2} \dots x_{in})^T \in E^n$, x_i 的值越大, 目标 B_j 的值最优, S_i 的决策向量 x_i 既有大小, 又有方向。 x_i 的大小 $\|x_i\|$ 反映了第 i

个专家对 $B_1, B_2 \dots B_n$ 整体印象的好坏, 在方向一致的情况下, 不同的专家打分也可能不同, 有的专家可能会整体偏高, 有的专家可能会整体偏低, 但对应分量成比例。在群决策中, 我们关心的是 n 个被评价对象 $B_1, B_2 \dots B_n$ 的相对重要性, 而这种相对重要性的信息是由决策向量的方向表达出来的, 与该向量的大小无关, 因此, 制定集结规则时, 必须剔除各决策向量的大小(专家对 $B_1, B_2 \dots B_n$ 整体印象的好坏)对群决策结果影响。

鉴于专家对 n 个对象 $B_1, B_2 \dots B_n$ 的相对重要性的评价只与决策向量的方向有关, 而与向量的大小无关, 令 $\alpha_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}, \alpha_2 = \frac{x_2}{\|x_2\|} \dots \alpha_m = \frac{x_m}{\|x_m\|}$, 即 $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m$ 分别是 $x_1, x_2 \dots x_m$ 相应的单位向量, 以下我们仅对 $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m$ 集结方式加以研究。

定义 1 设有 m 个 n 维决策向量 $x_1, x_2 \dots x_m \in E_n$, $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m$ 分别是 $x_1, x_2 \dots x_m$ 相应的单位向量, 称 $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m$ 分别为 $x_1, x_2 \dots x_m$ 的真实偏好。

定义 2 对于 $m (m \geq 2)$ 个专家组成的群组决策系统, 设 α 是最终达成群组妥协或一致的向量, (不妨令 $\|\alpha\|_2 = 1$), γ_i 分别是第 i 个专家的真实偏好 $\alpha_i (i=1, 2 \dots m)$ 在 α 上的投影, 则称 $\|\gamma_i\|_2$ 为第 i 个专家对最终决策结果 α 的影响力。

定义 3 对于一个集结规则 H , 任意 $x_i, x_j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m$, x 是 H 下 x_i, x_j 的决策结果, 若 x_i, x_j 与 x 的夹角总相等, 称 H 具有公平性。

由定义 2 易知, 集结规则 H 具有公平性的含义是: 任意 $x_i, x_j \in T, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m$, x 是 H 下 x_i, x_j 的决策结果, 则第 i 个专家与第 j 个专家对 x 具有同样的影响力。

在群决策中, 我们认为能够达到群体一致的最佳的决策是群体中各专家对最终决策结果达到影响力最大化。

$$\text{注意到 } \|\gamma_i\|_2 = \frac{\alpha_i \alpha}{\|\alpha_i\| \cdot \|\alpha\|} \|\alpha_i\| = \alpha_i \alpha (\text{注意 } \|\alpha\|_2 = 1)$$

于是问题即为求解

$$\max_{\|\alpha\|=1} \sum_{i=1}^m \|\gamma_i\|_2 = \max_{\|\alpha\|=1} \sum_{i=1}^m \alpha_i \alpha \quad (5)$$

由向量内积的性质

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \alpha = \sum_{i=1}^m \alpha_i \alpha$$

所以 α 与 $\sum_{i=1}^m \alpha_i$ 同向时, (5)式取到最大值, 于是

(5)的最优解为

$$\alpha = \sum_{i=1}^m \alpha_i / \parallel \sum_{i=1}^m \alpha_i \parallel \tag{6}$$

且(6)是(5)唯一最优解.

定义 4 设有 $m(m\geqslant 2)$ 个 n 维向量 $x_1, x_2 \cdots x_m \in E_n$, 它们相应的单位向量分别为 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 称 $\sum_{i=1}^m \alpha_i / \parallel \sum_{i=1}^m \alpha_i \parallel$ 为 $x_1, x_2 \cdots x_m$ 的方向合成向量.

由定义 4 及定义 4 前面的讨论易知以下定理成立.

定理 1 设有 $m(m\geqslant 2)$ 个 n 维决策向量为 $x_1, x_2 \cdots x_m \in E_n$, $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 分别为 $x_1, x_2 \cdots x_m$ 的真实偏好, 各专家地位平等的情况下, 则决策结果满足公平性、唯一性、群组团体影响力的和最大的充分必要条件是集结规则 H 为(6)式, H 下的决策结果是 $x_1, x_2 \cdots x_m$ 的方向合成向量.

在群决策中, 鉴于 n 个被评价对象 $B_1, B_2 \cdots B_n$ 的相对重要性, 仅与决策向量方向有关, 而与大小无关, 其最终决策结果是方向合成向量(相对来讲, 起作用的都是它们的方向), 故称以上群决策方法为向量方向合成法.

3 群决策的向量方向合成法在项目评价中的应用

现有三个项目分别是 L_1, L_2, L_3 , 每个项目各有三个同类指标 B_1 (利润率), B_2 (安全系数, 与风险相对, 安全系数越大, 风险越小), B_3 (环保指数), 每个项目相应的各指标都是越大越好(见表 1). 由六个专家 $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ 对 B_1, B_2, B_3 三个指标做

评判, 评分结果见表 2, 试给出项目投资的优先次序.

表 1

项目 \ 指标	L_1	L_2	L_3
B_1	0.8	0.9	0.75
B_2	0.8	0.6	0.9
B_3	0.75	0.7	0.85

表 2

指标	专家					
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
B_1	5	1	2	1	3	1
B_2	4	3	4	2	4	4
B_3	1	4	5	4	5	5

依表 2 按群决策向量方向合成法得 6 位专家对 B_1, B_2, B_3 的相对重要程度的最终决策结果为(0.36, 0.6, 0.72), 于是项目 L_1, L_2, L_3 的最终评价分别为 1.31, 1.18, 1.42, 所以项目 L_1, L_2, L_3 投资的优先次序为 $L_3 > L_1 > L_2$.

4 结 论

本文从数学角度论证了群决策特征根法不满足唯一性, 从而是错误的.

参考文献:

[1] 邱菀华. 群组决策特征根法. 应用数学与力学[J]. 1997, 18(11): 1027~1033.
[2] 王明文, 谭玮. 关于群组决策特征根法的注记. 江西师范大学学报[J]. Vol. 23. No. 3. Aug. 1999, 219~222.
[3] 邱菀华. 管理决策与应用熵学[M]. 北京: 机械工业出版社. 2002, (1): 277~289.

The Method of Vector Direction Composition Through Multi-Group Decision-making and It's Application in Project Appraisal

FU Li-xian

(School of Natural Science, East China Jiaotong univ., Nanchang 330013, China)

Abstract: This paper demonstrates that there is a bug in the method of multi-group decision-making latent root. Regarding that on-weighted decision-making vector is not relevant to its magnitude but only to it's direction, a new method of vector direction composition through multi-group decision-making is put forward. And the collective rules H determined by the method meet the equity, the result decision-made by it ensures that the summation of multi-group influence is maximum and unique. A sample is showed in the end.

Key word: multi-group decision-making; direction composition; veritable predilection; equity; influence power.