

文章编号: 1005—0523(2003)05—0118—03

关于混合单调算子新的不动点定理及应用

盛梅波¹, 左黎明¹, 席国忠²

(1. 华东交通大学 基础科学学院, 江西 南昌 330013; 2. 浙江省台州市路桥区金清中学, 浙江 台州 318058)

摘要: 利用非对称迭代的方法研究了几类既没有连续性条件也没有紧性条件而只满足某些序条件的混合单调算子不动点的存在性、唯一性及迭代收敛性, 得出了新的不动点定理以及给出此迭代的误差估计, 并在非线性方程中得到应用.

关 键 词: 混合单调算子; 正规锥; 不动点

中图分类号: O177.91, O189.2

文献标识码: A

1 引 言

迭代逼近的方法是处理非线性问题的基本工具之一, 特别是对于在适当的序条件下的非线性单调算子问题应用迭代方法得出了许多好的结果(见文[1]~[7]等), 本文利用一种非对称迭代格式进一步研究了一类混合单调算子的不动点的存在性、唯一性, 并得出此迭代的误差估计.

以下总假定 E 是一个实 Banach 空间, P 是 E 中正规锥, N 为 P 的正规常数, 半序“ $\leq$ ”是由锥 P 诱导的.

定义 1 设 $x_0 \in E, y_0 \in E$, 有 $x_0 < y_0$, 称集合 $[x_0, y_0] = \{x \mid x_0 \leq x \leq y_0\}$ 为 E 中的序区间.

定义 2 设非空集 $D \subset E$, 算子 $A: D \times D \rightarrow E$ 称为混合单调算子, 如果

(I) 对每个固定的 $y \in D, A(x, y)$ 在 D 上关于 x 是单调递增的,

即: $\forall x_1 < x_2 \in [x_0, y_0]$, 有 $A(x_1, y) \leq A(x_2, y), x_0 \leq y \leq y_0$;

(II) 对每个固定的 $x \in D, A(x, y)$ 在 D 上关于 y 是单调递增的,

即: $\forall y_1 < y_2 \in [x_0, y_0]$, 有 $A(x, y_2) \leq A(x, y_1), x_0 \leq x \leq y_0$;

定义 3 设 $A: D \times D \rightarrow E$ 是 D 上的算子, 如果

如果存在 $x^* \in D$, 使得 $A(x^*, x^*) = x^*$, 则称 $x = x^*$ 是算子 $A(x, y)$ 在 D 上的一个不动点.

2 主要结果

定理 1 设 $A: [x_0, y_0] \times [x_0, y_0] \rightarrow E$ 的混合单调算子, 且存在常数 $\alpha, \beta \in (0, 1), \alpha + \beta < 1$, 满足下列两个条件:

(I) $x_0 + \alpha(y_0 - x_0) \leq A(x_0 - y_0), A(y_0, x_0) \leq y_0$;

(II) $A(y, x) - A(x, y) \leq \beta(y - x)$, 当 $x_0 \leq x < y \leq y_0$ 时;

则混合单调算子 $A(x, y)$ 在 $[x_0, y_0]$ 上有唯一的公共不动点 x^* .

收稿日期: 2003—07—25

中国期刊网 <http://www.cnki.net> 盛梅波, 左黎明, 席国忠, 华东交通大学副教授

构造迭代格式:
$$\begin{cases} x_{n+1} = A(x_n, y_n) - \alpha(y_n - x_n) \\ y_{n+1} = A(y_n, x_n) \end{cases}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

都收敛于 x^* , 且有误差估计式
$$\begin{cases} \|x_n - x^*\| \leq N(\alpha + \beta)^n \|y_0 - x_0\| \\ \|y_n - x^*\| \leq N(\alpha + \beta)^n \|y_0 - x_0\| \end{cases}.$$

证明 1° 由数学归纳法验证 $x_{n-1} \leq x_n \leq y_n \leq y_{n-1}$, $n=1, 2, \dots$, (1)

事实上, $n=1$ 时, 由条件(I)得

$x_0 \leq A(x_0, y_0) - \alpha(y_0 - x_0) = x_1 \leq A(x_0, y_0) \leq A(y_0, x_0) = y_1 \leq y_0$, 式(1)成立.

假设 $n=k$ 时式(1)成立, 即有

$$x_{k-1} \leq x_k \leq y_k \leq y_{k-1}$$

从而有

$$\alpha(y_k - x_k) \leq \alpha(y_{k-1} - x_{k-1})$$

又由于 A 是 $[x_0, y_0] \times [x_0, y_0]$ 上混合单调算子, 则

$$A(x_{k-1}, y_{k-1}) \leq A(x_k, y_{k-1}) \leq A(y_k, x_{k-1}) \leq A(y_k, x_k) \leq A(y_{k-1}, x_{k-1})$$

当 $n=k+1$ 时, 由归纳假设得

$$\begin{aligned} x_k &\leq A(x_{k-1}, y_{k-1}) - \alpha(y_{k-1} - x_{k-1}) \leq A(x_{k-1}, y_{k-1} - \alpha(y_k - x_k)) \\ &\leq A(x_k, y_k) - \alpha(y_k - x_k) = x_{k+1} \\ &\leq A(x_k, y_k) \leq A(y_k, x_k) = y_{k+1} \leq A(y_{k-1}, x_{k-1}) = y_k \end{aligned}$$
 式(1)成立.

2° 下面证明 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 是 E 中的 Cauchy 序列.

由 1° 和条件(II)以及 A 的混合单调性得

$$\begin{aligned} \theta \leq y_n - x_n &= A(y_{n-1}, x_{n-1}) - A(x_{n-1}, y_{n-1}) + \alpha(y_{n-1} - x_{n-1}) \\ &\leq \beta(y_{n-1} - x_{n-1}) + \alpha(y_{n-1} - x_{n-1}) \\ &= (\alpha + \beta)(y_{n-1} - x_{n-1}) \end{aligned}$$

继续可得

$$\begin{aligned} \theta \leq y_n - x_n &\leq (\alpha + \beta)(y_{n-1} - x_{n-1}) \leq (\alpha + \beta)^2(y_{n-2} - x_{n-2}) \\ &\leq \dots \leq (\alpha + \beta)^n(y_0 - x_0) \end{aligned}$$
 (2)

根据 P 的正规性得 $\|y_n - x_n\| \leq N(\alpha + \beta)^n \|y_0 - x_0\|$ (3)

又

$$\begin{aligned} \theta \leq x_{n+m} - x_n &\leq y_{n+m} - x_n \leq y_n - x_n \leq (\alpha + \beta)^n(y_0 - x_0) \\ \theta \leq y_n - y_{n+m} &\leq y_n - x_{n+m} \leq y_n - x_n \leq (\alpha + \beta)^n(y_0 - x_0) \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\| &\leq N(\alpha + \beta)^m \|y_0 - x_0\| \\ \|y_n - y_{n+m}\| &\leq N(\alpha + \beta)^m \|y_0 - x_0\| \end{aligned}$$

因此 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 是 E 中的 Cauchy 序列.

3° 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \bar{y}$, 则 $\bar{x} = \bar{y} = x^*$, 就是 $A(x, y)$ 的不动点.

由(1)式得

$$x_n \leq \bar{x} \leq \bar{y} \leq y_n, \quad \theta \leq \bar{y} - \bar{x} \leq y_n - x_n$$

又由(2)式得

$$\theta \leq \bar{y} - \bar{x} \leq y_n - x_n \leq (\alpha + \beta)^n(y_0 - x_0)$$

根据 P 的正规性得

$$\|\bar{y} - \bar{x}\| \leq N(\alpha + \beta)^n \|y_0 - x_0\|$$

即

$$x_0 \leq \bar{y} = \bar{x} = x^* \leq y_0$$

进一步有

$$x_n \leq A(x_{n-1}, y_{n-1}) \leq A(x^*, x^*) \leq A(y_{n-1}, x_{n-1}) = y_n$$

因此

$$\theta \leq A(x^*, y^*) - x_n \leq y_n - x_n \leq (\alpha + \beta)^n(y_0 - x_0)$$

根据 P 的正规性得 $\|A(x^*, x^*) - x_n\| \leq N(\alpha + \beta)^n \|y_0 - x_0\|$

故

$$\begin{aligned} \|A(x^*, x^*) - x_n\| &\leq \|A(x^*, x^*) - x_n\| + \|x_n - x^*\| \\ &\leq 2(\alpha + \beta)^n(y_0 - x_0) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

即

$$A(x^*, x^*) = x^*$$

4° x^* 是唯一的. 设 $z' \neq x^*$ 也是 $A(x, y)$ 在 $[x_0, y_0]$ 上的不动点, 则

$$x_1 = A(x_0, y_0) - \alpha(y_0 - x_0) \leq A(x_0, y_0) \leq A(z', z') = z' \leq A(y_0, x_0) = y_1$$

由数学归纳法得 $x_n \leq z' \leq y_n$, 则 $\theta \leq z' - x_n \leq y_n - x_n \leq (\alpha + \beta)^n (y_0 - x_0)$,

根据 P 的正规性得 $\|z' - x_n\| \leq N(\alpha + \beta)^n \|y_0 - x_0\|$

从而 $\|z' - x^*\| \leq \|z' - x_n\| + \|x_n - x^*\| \leq 2(\alpha + \beta)^n (y_0 - x_0) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

即 $z' = x^*$.

最后, 在(3)式中令 $n \rightarrow \infty$ 便可得到误差估计式. 证毕

定理 2 设 A : 若存在常数满足下列两个条件:

(I) $x_0 \leq A(x_0, y_0), A(y_0, x_0) \leq y_0$;

(II) $\theta \leq A(y, x) - A(x, y) \leq \beta(y - x)$, 当 $x_0 \leq x \leq y \leq y_0$ 时.

则混合单调算子 $A(x, y)$ 在 $[x_0, y_0]$ 上有唯一的不动点 x^* .

构造迭代格式:
$$\begin{cases} x_{n+1} = A(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = A(y_n, x_n) \end{cases}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

都收敛于 x^* , 且有误差估计式:

$$\begin{cases} \|x_n - x^*\| \leq N\beta^n \|y_0 - x_0\| \\ \|y_n - x^*\| \leq N\beta^n \|y_0 - x_0\| \end{cases}.$$

证: 类似于定理 1 的证明可得. 证毕

定理 3 设非线性算子 $A(x, y) = \int_D k(t, s)f(x(s), y(s))ds + g(t)$, 其中有界集 $D \subset R^N$, 对 D 上的有界连续函数 $x(t), y(t)$, 满足下列条件满足:

(I) $k(t, s): D \times D \rightarrow R$: 非负有界可测的, $g(t)$ 是 D 上的连续函数;

(II) $f(x(s), y(s)): R \times R \rightarrow R$ 有界可测且关于 $x(s)$ 增, 关于 $y(s)$ 减;

(III) 令 $m = \inf_{t \in D} \int_D k(t, s)ds, M = \sup_{t \in D} \int_D k(t, s)ds$, 存在常数 $\alpha \in (0, 1)$ 以及 $x_0(s), y_0(s)$, 对使得 $x_0(s) \leq y_0(s)$, 有 $x_0(s) + \alpha(y_0(s) - x_0(s)) \leq mf(x_0(s), y_0(s)) + \min g(t), Mf(y_0(s), x_0(s)) + \max g(t) \leq y_0(s)$;

(IV) 存在常数 $\beta \in (0, 1)$, 使得: $x_0(s) \leq x(s) \leq y(s) \leq y_0(s)$, 有

$$\int_D k(t, s)[f(y(s), x(s)) - f(x(s), y(s))]ds \leq \beta(y(t) - x(t));$$

则当 $\alpha + \beta < 1$ 时, $A(x, y)$ 在 $[x_0(s), y_0(s)]$ 上有唯一的不动点 $x^*(s)$.

事实上: 容易验证算子 $A(x, y)$ 在 $[x_0(s), y_0(s)]$ 上满足定理 1 的条件, 故结论成立.

参考文献:

- [1] Zhang Shisheng, Guo Weiping. On the existence and uniqueness theorems of solutions for the systems of mixed monotone operator equations with applications. [J]. Applied Mathematics. A Journal of Chinese Universities (SerB), 1993, 8: 11~14.
- [2] Guo Dajun, Lakshmikantham. v. Coupled fixed points of nonlinear operators with application [J]. Nonlinear Anal., 1987, (11): 623~632.
- [3] 盛梅波, 董祥南. 混合单调算子对的公共不动点定理 [J]. 华东交通大学学报 (自然版), 2003, (1): 86~88.
- [4] 张志涛. 混合单调算子的不动点定理及其应用 [J]. 数学学报, 1998, 41(6): 1121~1126.
- [6] 颜心力. 对称压缩算子方程解的存在与唯一性定理及应用 [J]. 科学通报, 1990, (10): 733~736.
- [7] 郭大钧. 非线性泛函分析 [M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1985.

New Fixed Point Theorems of Mixed Monotone Operator and It's Applications

SHENG Mei-bo¹, ZUO Li-ming¹, XI Guo-zhong²

(School of Natural Science East China Jiaotong University, Nanchang 330013; 2. Jiangqing Middle School, Iuqiao Area, Taizhou City, Taizhou Zhejiang 318058, China)

Abstract: In this paper, nonsymmetric iteration method is used to study existence, uniqueness and iteration of monotone operator which only satisfies some ordered condition while having no continuous condition and compact condition. A new fixed point on comple mixed is obtained. And it is applied to nonlinear equation on $D \in R^N$.

Key words: mixed montone operator; normal cone; fixed point