

文章编号: 1005-0523(2003)05-0121-02

F-正规拓扑空间的性质

蒋志勇

(华东交通大学 基础科学学院, 江西 南昌 330013)

摘要: 利用关于 F -连续映射^[2]的概念以及模糊集的若干分离性^[2]的概念给出了 F -正规拓扑空间的两个性质, 所得出的结论是经典正规拓扑空间相应性质的推广, 同时也是对有关 F -分离公理体系的进一步完善和发展.

关 键 词: F -正规拓扑空间; 关于 F -连续函数; F -Urysohn 引理

中图分类号: O159

文献标识码: A

定义 1^① 设 $A, B \in [0, 1]^X$ (X 是分明集合), 记 $A \overset{\vee}{\cap} B$ 表示 A 和 B 的对偶交, 其定义如下:

$A \overset{\vee}{\cap} B = \{p \mid p \in A, p^* \in B, p \in P_0\}$ (p^* 为 p 的对偶点)

其中 $P_0 = \{P_x^\alpha \mid x \in X, \alpha \in [0, 1]\}$

② 设 $A, B \in [0, 1]^X$, 记 $A \overset{\vee}{\cap} B$ 表示 A 和 B 的强对偶交, 其定义如下:

$A \overset{\vee}{\cap} B = \{p \mid p \in A, p \in B, p \in P_0\}$

定义 2 设 $A, B \in [0, 1]^X$, N_A, N_B 分别表示 A, B 的 F -邻域系, 称 A 和 B 是

① 分离的: 若 $\exists U \in N_A$ 及 $V \in N_B$, 使得 $U \overset{\vee}{\cap} B = \emptyset$ 及 $V \overset{\vee}{\cap} A = \emptyset$;

② 强分离的: 若 $A \overset{\vee}{\cap} B = \emptyset$, ($\bar{A}, \bar{B}$ 分别表示 A, B 的 F -闭包);

③ 不连的: 若 $\exists U \in N_A$ 及 $V \in N_B$, 使得 $U \overset{\vee}{\cap} V = \emptyset$.

定义 3 设 (X, T) 是 F -拓扑空间, 若任意两个 F -闭集 A, B 是强分离且不连的, 则称 (X, T) 是 F -正规拓扑空间.

定义 4 设是 F -拓扑空间, 若函数 $f: P_0 \rightarrow [0, \lambda]$ 满足:

① 对 $\forall \alpha, \beta \in [0, 1]$, 当 $\alpha < \beta$ 时, 有 $f(P_x^\alpha) \leq f$

(P_x^β) ;

② 对于 $\forall a, b \in [0, 1]$, 当 $0 \leq a < b \leq 1$ 时, F -集 $A = \bigcup \{P_x^a \mid f(P_x^a) \leq a\}$ 是 F -闭集, F -集 $B = \bigcup \{P_x^a \mid f(P_x^a) < b\}$ 是 F -开集, 且 $B \in N_A$, 则称 f 是关于 F -连续函数.

定义 5 设 (X, T) 是 F -拓扑空间, $A, B \in [0, 1]^X$, 且 $A \overset{\vee}{\cap} B = \emptyset$, 若函数 $f: P_0 \rightarrow [0, 1]$ 满足:

① f 是关于 F -连续函数;

② 当 $P_x^a \in$ 时, $f(P_x^a) = 0$; 当 $P_y^\beta \in B$ 时, $f(P_y^{1-\beta}) = 1$; 则称 f 是关于 F -集 A 和 B 的 Urysohn 函数.

定义 6 **①** 称 F -拓扑空间 (X, T) 中的 F -集 A 为 F -开 F_σ 集, 若存在一簇 F -闭集 F_i , ($i = 1, 2, \dots$), 使得 $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ 且 $A' \overset{\vee}{\cap} F_i = \emptyset$ ($i = 1, 2, \dots$), 此处的 A' 是 A 的 F -余集;

② 称 F -拓扑空间 (X, T) 中的 F -集 A 为 F -闭 G_δ 集, 若 A' 为 F -开 F_σ 集.

注记: 此处的定义 6 是对经典拓扑中的开 F_σ 集和闭 G_δ 集^[1]概念的推广.

定理 1 设 (X, T) 为 F -正规拓扑空间, $A \in [0, 1]^X$ 为 F -闭 G_δ 集 $\Leftrightarrow$

$\exists f: P_0 \rightarrow [0, 1]$ 是关于 F -连续的函数且 $A = f^{-1}(0)$.

收稿日期: 2003-06-27

中国知网 <https://www.cnki.net> 蒋志勇, 男, 1966 年 10 月 1 日出生, 华东交通大学副教授, 理学硕士.

证:“ $\Leftarrow$ ”由于 $\{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ 为闭 G_δ 集, 又由于 $f: P_0 \rightarrow [0, 1]$ 是关于 F -连续的函数且 $A = f^{-1}(0)$, 则 $A \in [0, 1]^X$ 为 F -闭 G_δ 集.

“ $\Rightarrow$ ”设 $A \in [0, 1]^X$ 为 F -闭 G_δ 集, 则 A' 为 F -开 F_σ 集, 由定义 6 知: 存在一簇 F -闭集 F_i , ($i = 1, 2, \dots$), 使得 $A' = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_i$ 且 $A \bigcap \bigvee_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$ ($i = 1, 2, \dots$), 根据 F -Urysohn 引理, 对任意 $i \in \{1, 2, \dots\}$, 存在关于 F -连续的函数 $f_i: P_0 \rightarrow [0, 1]$, 使得当 $P_x^\alpha \in A$ 时, $f_i(P_x^\alpha) = 0$, 而当 $P_y^\beta \in F_i$ 时, $f_i(P_y^{1-\beta}) = 1$, 构造函数 $f: P_0 \rightarrow [0, 1]$, $P_x^\alpha \rightarrow f(P_x^\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} f_i(P_x^\alpha)$, $P_x^\alpha \in P_0$, 则 f 是关于 F -连续的函数, 且当 $P_x^\alpha \in A$ 时, $f(P_x^\alpha) = 0$, 而当 $P_x^\alpha \in A'$ 时, 存在某个 $i_0 \in \{1, 2, \dots\}$, 使得 $P_x^\alpha \in F_{i_0}$, 此时有: $f(P_x^{1-\alpha}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} f_i(P_x^{1-\alpha})$ ($P_x^{1-\alpha} \in F_{i_0}$), 此时有: $f(P_x^{1-\alpha}) \geq \frac{1}{2} > 0$, 综上有 $A = f^{-1}(0)$.

定理 2 设 (X, T) 为 F -拓扑空间, 对 $\forall C \in [0, 1]^X$ 为 F -闭集及 $\forall G \in [0, 1]^X$ 为 F -开集, 且 $C \subset G$, 存在开集簇 $G_i \in [0, 1]^X$ ($i = 1, 2, \dots$), 满足: $C \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ 且 $\overline{G_i} \subset G$ ($i = 1, 2, \dots$), 则 (X, T) 为 F -正规拓扑空间.

证: 对于 $\forall A, B \in [0, 1]^X$ 为 F -闭集, 若 $A \bigcap B = \emptyset$, 由于 $A \subset B'$ 为 F -开集, 根据假设知: 存在 F -开集簇 G_i , 使得 $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$, $\overline{G_i} \subset B'$ ($i = 1, 2, \dots$), 同理有, 存在 F -开集簇 H_i , 使得 $B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$, $\overline{H_i} \subset A'$

($i = 1, 2, \dots$), 记

$$U_i = G_i \cap \left[\bigcup_{j \leq i} \overline{H_j} \right]', V_i = H_i \cap \left[\bigcup_{j \leq i} \overline{G_j} \right]', (i = 1, 2, \dots).$$

由于 $A \subset \left[\bigcup_{j \leq i} \overline{H_j} \right]'$ 及 $B \subset \left[\bigcup_{j \leq i} \overline{G_j} \right]'$, 所以取 $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$, 就有 $A \subset U$, $B \subset V$, 且由于 U_i, V_i ($i = 1, 2, \dots$) 均为 F -开集, 则 U, V 也为 F -开集, 从而 $U \in N_A, V \in N_B$.

下证: U 和 V 的强对偶交为空.

事实上, 若点 $P \in U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, 则存在某个 $i_0 \in \{1, 2, \dots\}$, $P \in U_{i_0}$ 且对任意的 $j \leq i_0$, $P \in \overline{H_j}'$, 从而 P 的对偶点 $P^* \notin \overline{H_j}$, $P^* \in H_j$.

因此 $U_{i_0} \not\cap H_j = \emptyset$, 从而 $U_{i_0} \not\cap V_j = \emptyset$, ($j \leq i_0$), 同理, 若 $P \in V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$, 则 $V_{j_0} \not\cap U_i = \emptyset$ ($i \leq j_0$, 其中 $j_0 \in \{1, 2, \dots\}$),

即 $U \not\cap V = \emptyset$, 故 A, B 是不连的.

综上 (X, T) 为 F -正规拓扑空间.

参考文献:

- [1] J. L. Kelley, General Topology, Van Nostrand, New York [M]. 1955.
- [2] Hu ChengMing, Fuzzy Topological Spaces, J. Math. Anal. Appl [J]. 110(1), 1985, 141~178.
- [3] B. Hutton, Normality in Fuzzy Topological Spaces, J. Math. Anal. Appl [J]. 50(1975).

The Properties of Normality in Fuzzy Topological Spaces

JIANG Zhi-yong

(School of Natural Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper, the concepts of fuzzy continuity function and fuzzy separation are used to introduce the properties of normal topology space, the conclusions are generation to corresponding properties and a development to fuzzy separation axiom systems.

Key words: F -normal topological space; F -continuity function; F -Urysohn lemma