

文章编号: 1005—0523(2003)05—0123—03

一个新的三元二次 Erdős—Mordell 型不等式

刘 健

(华东交通大学 体育学院, 江西 南昌 330013)

摘要: 由一个已知的三元二次 Erdős—Mordell 型不等式的推论受到启发, 得出了一个新的相类似的结果, 给出了它的一则应用, 提出并应用计算机验证了两个未解决的猜想.

关 键 词: 三角形; 点; 实数; 不等式

中图分类号: O 178

文献标识码: A

1 主要结果

设 $\triangle ABC$ 内部任一点 P 到顶点 A, B, C 与边 BC, CA, AB 的距离分别为 $R_1, R_2, R_3, r_1, r_2, r_3$, 则对任意实数 x, y, z 有

$$x^2 R_1 + y^2 R_2 + z^2 R_3 \geq 2(yzr_1 + zxr_2 + xy r_3) \quad (1)$$

这即是几何不等式中著名的三元二次 Erdős—Mordell 型不等式, 参见专著[1].

应用反演变换, 由(1)式可得已知的不等式:

$$\frac{x^2}{r_1} + \frac{y^2}{r_2} + \frac{z^2}{r_3} \geq 2 \left(\frac{yz}{R_1} + \frac{zx}{R_2} + \frac{xy}{R_3} \right) \quad (2)$$

这个不等式一个新的简单的证明见[2].

设 $\triangle ABC$ 相应边于边 BC, CA, AB 上的旁切圆半径与中线分别为 r_a, r_b, r_c 和 m_a, m_b, m_c , 则有已知的半对称不等式 $r_b r_c \leq m_a^2, r_c r_a \leq m_b^2, r_a r_b \leq m_c^2$. 据此在(2)式中作置换: $x \rightarrow x/\sqrt{r_a}, y \rightarrow y/\sqrt{r_b}, z \rightarrow z/\sqrt{r_c}$, 即可知对非负实数 x, y, z 继而对任意实数 x, y, z 成立不等式:

$$\frac{x^2}{r_a r_1} + \frac{y^2}{r_b r_2} + \frac{z^2}{r_c r_3} \geq 2 \left(\frac{yz}{m_a R_1} + \frac{zx}{m_b R_2} + \frac{xy}{m_c R_3} \right) \quad (3)$$

这个推论不等式启示作者发现了下述结论: 将上式左右两端的旁切圆半径与中线对调后的不等

式也成立. 确切地说我们有

定理 对 $\triangle ABC$ 内部任一点 P 与任意实数 x, y, z 有

$$\frac{x^2}{m_a r_1} + \frac{y^2}{m_b r_2} + \frac{z^2}{m_c r_3} \geq 2 \left(\frac{yz}{r_a R_1} + \frac{zx}{r_b R_2} + \frac{xy}{r_c R_3} \right) \quad (4)$$

等号当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形且 P 为其中心时成立.

Erdős—Mordell 型不等式(4)与不等式(3)在形式上完全一致, 但不等式(4)的证明要较(3)式复杂许多. 下面先介绍几个引理.

2 几个引理

引理 1^[3] 设正数 p_1, p_2, p_3 与实数 q_1, q_2, q_3 满足: $4p_2 p_3 > q_1^2, 4p_3 p_1 > q_2^2, 4p_1 p_2 > q_3^2$ 及

$$p_1 q_1^2 + p_2 q_2^2 + p_3 q_3^2 + q_1 q_2 q_3 \leq 4p_1 p_2 p_3 \quad (5)$$

则对任意实数 x, y, z 有

$$p_1 x^2 + p_2 y^2 + p_3 z^2 \geq q_1 yz + q_2 zx + q_3 xy \quad (6)$$

等号仅当(5)式取等号且 $x : y : z = \sqrt{4p_2 p_3 - q_1^2} : \sqrt{4p_3 p_1 - q_2^2} : \sqrt{4p_1 p_2 - q_3^2}$ 时成立.

引理 2 在 $\triangle ABC$ 中有

$$(m_a + m_b + m_c)^2 \geq \frac{9}{4}(2bc + 2ca + 2ab - a^2 - b^2 - c^2) \quad (7)$$

等号当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立.

不等式(7)实为作者在文献[4]中给出的动点类不等式:

$$PA + PB + PC \geq \sqrt{2bc + 2ca + 2ab - a^2 - b^2 - c^2} \quad (8)$$

的特款. 只要在上式中令 P 为 $\triangle ABC$ 的重心, 即得式(7).

引理 3 若对任意 $\triangle ABC$ 成立有关边长 a, b, c 与中线 m_a, m_b, m_c 及面积 $\triangle$ 的不等式:

$$f(a, b, c, m_a, m_b, m_c, \triangle) \geq 0 \quad (9)$$

则此不等式等价于

$$f(m_a, m_b, m_c, \frac{3}{4}a, \frac{3}{4}b, \frac{3}{4}c, \frac{3}{4}\triangle) \geq 0 \quad (10)$$

上述引理参见专著[1].

引理 4 设 $\triangle ABC$ 相应边上的高线与中线分别为 $h_a, h_b, h_c, m_a, m_b, m_c$, 则有

$$(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \left(\frac{1}{m_a^2} + \frac{1}{m_b^2} + \frac{1}{m_c^2} \right) \leq 9 \quad (11)$$

等号仅当 $\triangle ABC$ 为等腰三角形时成立.

从(11)式等号成立的条件可见, 不等式(11)是一个较强的结果, 其证明可见专著[1](P₂₁₅₋₂₁₆).

引理 5^[5] 在 $\triangle ABC$ 中有

$$(2bc + 2ca + 2ab - a^2 - b^2 - c^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq 9 \quad (12)$$

等号当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立.

引理 6 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R , 其余符号同上, 则

$$m_a m_b m_c \leq \frac{1}{2} R s^2 \quad (13)$$

等号当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立.

3 定理的证明与推论

下面, 分步来完成定理的不等式(4)的证明.

先来证有关中线与旁切圆半径的二次型不等式:

$$\frac{x^2}{m_a} + \frac{y^2}{m_b} + \frac{z^2}{m_c} \geq 2 \left(\frac{yz}{r_a} \sin \frac{A}{2} + \frac{zx}{r_b} \sin \frac{B}{2} + \frac{xy}{r_c} \sin \frac{C}{2} \right) \quad (17)$$

为此, 据引理 1 又先证半对称的不等式严格不等式:

$$\frac{4}{m_b m_c} > \left(\frac{2}{r_a} \sin \frac{A}{2} \right)^2 \quad (18)$$

$$\text{由公式: } \frac{4}{r_a} = \frac{2}{\sin \frac{A}{2}}, \quad (19)$$

可知上式等价于 $m_b m_c \cos^2 \frac{A}{2} < s^2$. 按引理 7 要证此式只要证 $(2a^2 + bc) \cos^2 \frac{A}{2} < 4s^2$. 下面来证较此更强的不等式 $(2a^2 + bc) \cos^2 \frac{A}{2} < 4s^2$, 由半角公式知这式等价于

$$(s - a)(2a^2 + bc) < 2bcs \quad (20)$$

容易验证恒等式:

$$2bcs - (s - a)(2a^2 + bc) = (s - a)bc + 2a[(s - a)^2 + (s - b)(s - c)] \quad (21)$$

由此即知不等式(20)成立, 从而不等式(18)获证.

现按引理 1 与不等式(18)以及相应的另两式知, 要证不等式(17)只要证:

$$\sum \frac{4 \sin^2 \frac{A}{2}}{m_a^2 a} + \frac{8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{r_a r_b r_c} \leq \frac{4}{m_a m_b m_c}$$

(其中 $\sum$ 表示循环和, 下同此)利用 $r_a r_b r_c = rs^2$ 与恒等式 $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{4r}{R}$ 以及(19)式等, 易知上式等价于

$$\sum m_b m_c \cos^2 \frac{A}{2} \leq \frac{3}{4} s^2 \quad (22)$$

由已知的不等式 $4m_b m_c \leq 2a^2 + bc$ 可知, 要证上式只要证:

$$\sum (2a^2 + bc) \cos^2 \frac{A}{2} \leq 3s^2,$$

易知此式等价于

$$3abcs \geq \sum a(s - a)(2a^2 + bc) \quad (23)$$

不难验证:

$$3abc - \sum a(s - a)(2a^2 + bc) = \frac{1}{2} \sum [(b^2 + c^2 - a^2)(b - c)^2] \quad (24)$$

因此, (23) 式的证明可化为

$$\sum (b^2 + c^2 - a^2)(b - c)^2 \geq 0 \quad (25)$$

为证上式不妨设 $a \geq b \geq c$, 则 $c_a + a^2 - b^2 > 0$, $a^2 + b^2 - c^2 > 0$. 因此欲证(27)式只要证:

$$(b^2 + c^2 - a^2)(b - c)^2 + (c^2 + a^2 - b^2)(c - a)^2 \geq 0, \quad \text{注意到 } (c - a)^2 \geq (b - c)^2, \text{ 可见要证上式只要证: } (b^2 + c^2 - a^2)(b - c)^2 + (c^2 + a^2 - b^2)(b - c)^2 \geq 0, \text{ 即 } 2c^2(b - c)^2 \geq 0, \text{ 这显然成立, 从而不等式(25), (23), (22), (17)式得证.}$$

最后根据不等式(17)与已知的半对称不等式

(参见文献[2]等): $\sin \frac{A}{2} \geq \frac{\sqrt{r_2 r_3}}{R_1}$ 以及与之相应的

另两式就知,对正数 x, y, z 继而对任意实数 x, y, z 有

$$\frac{x^2}{m_a} + \frac{y^2}{m_b} + \frac{z^2}{m_c} \geq 2 \left(yz \frac{\sqrt{r_2 r_3}}{r_a R_1} + zx \frac{\sqrt{r_3 r_1}}{r_b R_2} + xy \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{r_c R_3} \right) \quad (26)$$

接着作置换: $x \rightarrow \frac{x}{\sqrt{r_1}}, y \rightarrow \frac{y}{\sqrt{r_2}}, z \rightarrow \frac{z}{\sqrt{r_3}}$, 就得定理的不等式(4), 容易得知其等号成立的条件如定量中所述, 定理证毕.

推论

$$\frac{R_2 R_3}{R_1 m_a} + \frac{R_3 R_1}{R_2 m_b} + \frac{R_1 R_2}{R_3 m_c} \geq 2 \quad (27)$$

4 两个猜想

三元二次 Erdős — Mordell 型不等式已有许多的结果与未解决的猜想, 见文献[2], [3], [7], [8]. 下面, 我们再向读者介绍两个尚待解决的猜想.

如同从不等式(2)出发提出不等式(4)一样, 我们从作者建立的不等式:

$$x^2 R_2 R_3 + y^2 R_3 R_1 + z^2 R_1 R_2 \geq 4(yz r_2 r_3 + zx r_3 r_1 + xy r_1 r_2) \quad (28)$$

出发, 经过考察提出

猜想 1 符号同定理, 则对 $\triangle ABC$ 内部任一点 P 与任意实数 x, y, z 有

$$\frac{R_2 R_3}{m_a} x^2 + \frac{R_3 R_1}{m_b} y^2 + \frac{R_1 R_2}{m_c} z^2 \geq 4 \left(yz \frac{r_2 r_3}{r_a} + zx \frac{r_3 r_1}{r_b} + xy \frac{r_1 r_2}{r_c} \right) \quad (29)$$

把三元二次 Erdős — Mordell 不等式(1)中的 x, y, z 分别换成 y, z, x 与 z, x, y , 然后将所得两式相加, 即知文献[8]中猜想的不等式:

$$(R_2 + R_3)x^2 + (R_3 + R_1)y^2 + (R_1 + R_2)z^2 \geq 2[yz(r_2 + r_3) + zx(r_3 + r_1) + xy(r_1 + r_2)] \quad (30)$$

是成立的. 同不等式(4)与(29)的提出相类似, 由不

等式(30)从发, 我们又提出下述猜想:

猜想 2 符号同定理, 则对 $\triangle ABC$ 内部任一点与任意实数 x, y, z 有

$$\frac{R_2 + R_3}{m_a} x^2 + \frac{R_3 + R_1}{m_b} y^2 + \frac{R_1 + R_2}{m_c} z^2 \geq 2 \left(yz \frac{r_2 + r_3}{r_a} + zx \frac{r_3 + r_1}{r_b} + xy \frac{r_1 + r_2}{r_c} \right) \quad (31)$$

当 $x = y = z$ 时, 注意到恒等式:

$$\frac{r_2 + r_3}{r_a} + \frac{r_3 + r_1}{r_b} + \frac{r_1 + r_2}{r_c} = 2 \quad (32)$$

可知此时(33)式化为简洁的有关 R_1, R_2, R_3 与 m_a, m_b, m_c 的有趣的不等式:

$$\frac{R_2 + R_3}{m_a} + \frac{R_3 + R_1}{m_b} + \frac{R_1 + R_2}{m_c} \geq 4 \quad (33)$$

这个特款证明起来也颇不容易, 最近被褚小光用十分复杂的方法证明了. 猜想 2 的证明看来十分困难, 作者愿意为第一位正确给出这一猜想的证明者提供 1000 元人民币的悬赏.

参考文献:

- [1] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić and V. Volenec, Recent Advances in Geometric Inequalities[M]. Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [2] 刘健, 一个新的三元二次型几何不等式[J]. 重庆师范学院学报, 2002, 19(4): 14~17, 34.
- [3] 刘健, 一类几何不等式的两个结果与若干猜想[J]. 华东交通大学学报, 2002, 19(3): 89~94.
- [4] 刘健, 三个新的三角形不等式[J]. 教学月刊, 1993, 8, 1~4.
- [5] 杨学枝, shc73 的证明[A]. 见: 不等式研究[C]. 拉萨: 西藏人民出版社, 2000, 538~539.
- [6] 刘健, 关于锐角三角形的一个几何不等式[J]. 华东交通大学学报, 2000, 17(1), 75~78.
- [7] 刘健, 一个加权的 Erdős — Mordell 型不等式[J]. 洛阳师范学院学报, 2002, 21(5): 25~28.
- [8] 刘健, 关于三角形内部一点的一些不等式[J]. 铁道师院学报, 1998, 15(4): 74~78.

A New Inequality of Quadratic Erdős—Mordell Form of the Three Variables

LIU Jian

(East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: A new inequality of quadratic Erdős-Mordell form of the three variables is set up, One of its applications is obtained. Finally, two conjectures to be solved are put forward.

Key words: triangle; point; real numbers; inequality