

文章编号: 1005-0523(2004)02-0006-05

各向异性结合材料缺口端部反平面奇异性问题研究

陈梦成¹, 梁平英¹, 平学成²

(1. 土木建筑学院; 2. 机电工程学院)

摘要: 提出采用一种非协调元有限元特征法来计算各向异性材料在反平面剪切载荷作用下的奇性应力指数和奇性场角分布. 该方法没有采用奇异变换技术. 与以前的几种解析法比较, 结果表明这种方法的收敛性好, 精度高, 可以求解关于复杂几何体问题.

关 键 词: 各向异性; 反平面; 奇性应力场; 非协调元有限元法

中图分类号: F240

文献标识码: A

1 引 言

随着材料科学和材料结合技术的发展, 由多种各向异性复合材料构成的结合材料在工程中获得广泛应用. 这些结合材料存在很多界面, 并在其附近和界面极易造成损伤, 形成裂纹, 引起应力集中, 最终导致材料失稳破坏. Bogy^[1], Hoening^[2] 和 Sih et al^[3] 采用解析方法研究了各向异性材料裂纹尖端奇性应力场平面问题. 对于反平面问题, Hein 和 Erdogan^[4], Ma 和 Hour^[5], Pageau^[6] 已计算出奇性应力指数以及奇性点附近的应力场和位移场的角分布.

有限元法是一种较好的方法, 它广泛地应用于线弹性裂纹问题的研究, 这种方法与解析法相比, 无需高超的数学才能. 近年来, Barsoum^[7], Sukumar 和 kumosa^[8] 利用有限元迭代法求解奇性应力指数. Yamada 和 Okumura^[9] 利用有限元特征法直接获得奇性特征指数几应力场和位移场的角分布.

本文采用作者^[10]提出的一维非协调元有限元技术分析各向异性结合材料缺口端部反平面奇异性问题. 文中给出若干算例.

2 公式建立

图 1 是一个平面各向异性两相材料缺口形体示意图, 该扇区包含两个子扇区 Ω^1 和 Ω^2 (见图 1a). 为了求得缺口形体尖端奇异性应力场和位移场的角变化函数, 为此将缺口形体尖端邻域划分为若干个扇形区域, 扇区周边 ($r=R$) 每个单元角度范围为 $\theta_s \leq \theta \leq \theta_e$ (上标表示单元的情况), 共有 $n+2$ 节点 (见图 1b).

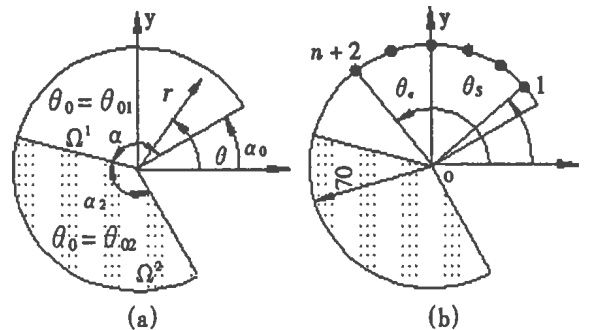


图 1(a) 各向异性复合材料缺口形体 (b) 有限单元划分

该有限元法公式推导原理和平学成^[11]大体相同, 不同点在于材料刚度矩阵 $[D]$, 其表达式为

$$[D] = [T]^T [T]^T [S_p]^{-1} [T] [T] \quad (1)$$

其中

$$S_p = \begin{bmatrix} 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 1/G_{23} \end{bmatrix},$$
$$T = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & \sin \theta_0 \\ -\sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{bmatrix}$$

式中 $G_{ij}(i, j=1, 2, 3)$ 为材料剪切常数; θ_0 材料属性轴; ϕ 为积分轴.

另外有限元特征方程为

$$\begin{bmatrix} -P^{-1}Q & -P^{-1}R \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

其中, $\mathbf{p} = \lambda \mathbf{q}$, λ 为特征值, $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{q}$ 为特征向量, 一般情况下, 方程(2)的解将给出有限个实特征值 λ 和相关特征向量 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{q}$. 一旦获得了特征值和特征向量 $\mathbf{q}$, 缺口形体尖端附近的奇性应力场和位移场就可相应给出.

3 计算结果讨论

在下面部分, 研究了几种典型的含有裂纹各向异性材料及联结体的情况, 把所得结果与其他方法作比较, 最后这种有限元法所得的值的 λ 值的收敛性得到验证, 并说明了该方法的有效性.

3.1 有限元法的收敛性

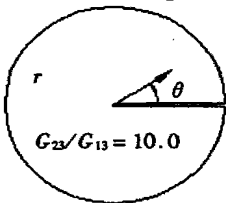


图 2 含线裂纹的单相各向异性材料

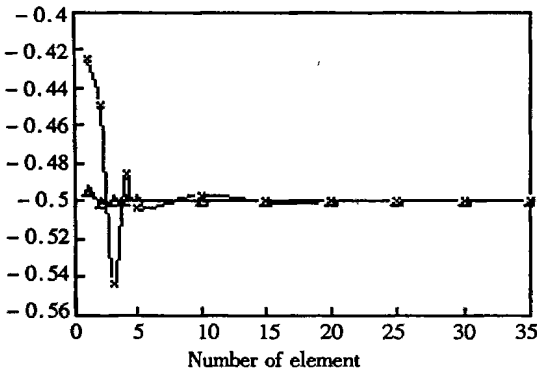


图 3 材料奇性应力指数的收敛速度比较

下面以含线裂纹的单相各向异性材料为例, 如图 2 所示, 其材料常数关系为 $G_{23}/G_{13}=10.0$. Sih *et al.*^[4] 得到这个算例的精确解为 -0.5 , 本文采用 17 个高斯点, 用 2 个单元就收敛于 -0.5 , 如图 3 所示.

Pageau *et al.*^[6] 的结果也在图中一并给出, 他在处理这个问题的时候, 采用了 5 个高斯点, 但直至 25 个单元才得到一个较为精确的结果. 相比之下, 本文的收敛性的优越性明显.

3.2 有限元法研究各向异性结合材料缺口的有效性

首先, 本文以 Ma 和 Hour^[5] 的一个各向异性两相缺口形体为例, 如图 4 所示, 用非协调元特征方程来处理这个问题, 对于不同的 θ_0 , 其结果 λ 值如表 1, 本文的单元数比 Pageau *et al.*^[6] 的少, 所得的结果 Ma 和 Hour^[5] 的精确解吻合. 两相各向异性结合材料缺口端部的位移和应力角分布函数如图 5 所示, 在材料 1 和材料 2 的联结面上, $\sigma_{rz}(\theta)$ 在界面上由于材料常数的不连续, 有小小的突变, 该结合面较容易撕裂.

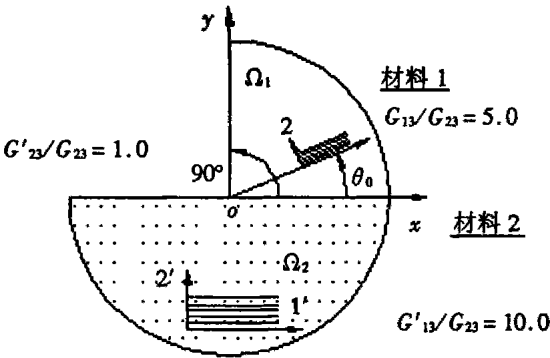


图 4 两相各向异性材料缺口形体

表 1 图 4 所示材料的奇性应力指数的数值解与以有解的比较

θ_0 (deg)	当前解 (6 个单元)	Pageau <i>et al.</i> ^[7] 解(9 个单元)	精确解 (Ma 和 Hour ^[6])	当前解 精确解
0	-0.300786	-0.3017434	-0.3007857	0.999999
22.5	-0.385702	-0.3863963	-0.3857022	1.000001
45	-0.407644	-0.4081756	-0.407644	1.000000
67.5	-0.385702	-0.3865796	-0.3857022	1.000001
90	-0.300786	-0.3017869	-0.3007857	0.999999

另一个重要的例子是, 存在终止于两相各向异性材料界面斜裂纹问题. 如图 6 所示. 针对不同的奇性应力指数如表 2 所示, 与 Ma 和 Hour^[5] 的数值解比较, 可以看出本文的数值解是很精确的, 图 7 给出了 $\theta_0=90^\circ$ 位移和应力场的角分布函数, 由于此时结构的对称性, 位移和应力角分布函数曲线也是正对称或反对称的. $w(\theta)$ 最大值出现在两相材料的结合界面上. 剪应力角分布函数中, 剪应力 $\sigma_{rz}(\theta)$ 在裂纹面处幅值最大. 在两相材料的完好结合界面上, 剪应力 $\sigma_{rz}(\theta)$ 和 $\sigma_{\theta z}(\theta)$ 都是平稳过渡, 也即奇性位

移和应力场在结合界面上没有突变和转折,破坏的可能性相对较小.

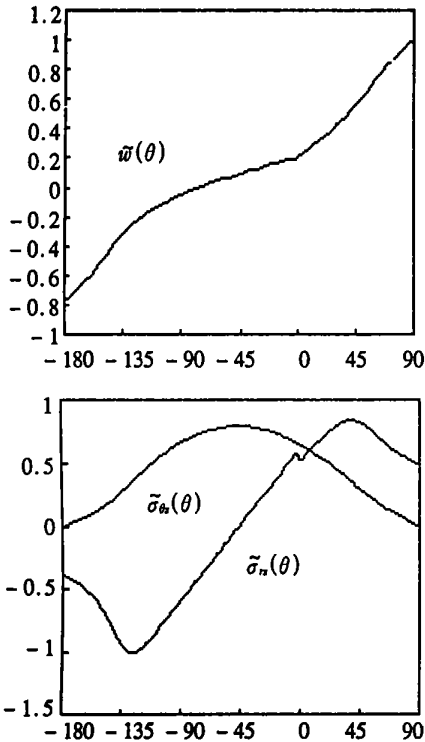


图 5 两相各向异性材料缺口形体的归一化位移和应力的角分布函数

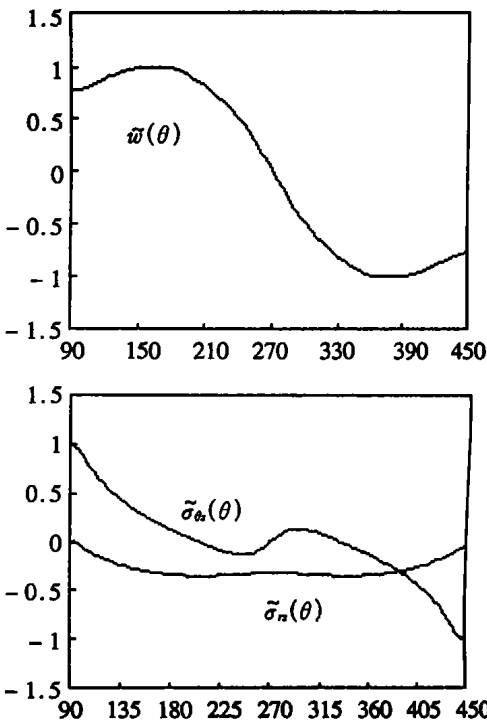


图 7 材料在 $\theta_0=90^\circ$ 时的归一化位移和应力的角分布函数

4 结 论

本文提出了求解各向异性结合材料缺口端部反平面奇异性问题的一维非协调元有限元特征分析法,与以前方法相比,本文方法数值结果收敛性较快,精度高.该方法为我们今后进一步研究几何构造复杂的各向异性结合材料断裂力学问题奠定了基础.

参考文献:

[1] Bogy DB, On the Plane Elastostatic Problem of a Loaded Crack Terminating at a Material Interface, Journal of Applied Mechanics, 1971, 38, 911~918.

[2] Hoening A, Near tip behavior of a crack in a plane anisotropic elastic body, Eng. Fracture Mech., 1982, 16, 393~403.

[3] G.C.Sih, P.C.Paris and G.R.Irwin, On crack in rectilinearly anisotropic bodies, Int. J. Fracture Mech., 1965, 1, 189~202.

[4] Hein VL & Erdogan F, Stress singularities in a two-material wedge, Int. J. Fract. Mech., 1971, 7317~330 [5] Ma C.C. and Hour B.L., Analysis of dissimilar anisotropic wedges subjected to antiplane shear deformation. Int. J. Solids Structures, 1989, 11, 1295~1309.

[5] Ma C.C. and Hour B.L., Analysis of dissimilar anisotropic wedges subjected to antiplane shear deformation. Int. J. Solids Structures, 1989, 11, 1295~1309.

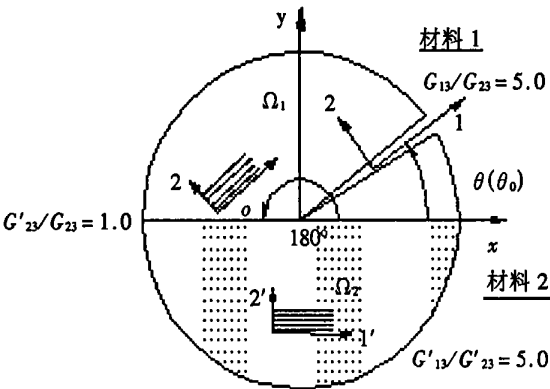


图 6 具有终止于两相材料界面的斜裂纹的复合材料联结

表 2 图 6 所示材料的奇性应力指数的数值解与以有解的比较

θ_0 (deg)	单元数	当前解	精确解 (Ma 和 Hour ^[6])	当前解 精确解
10	9	-0.529583	-0.529583	1.000000
30	8	-0.549334	-0.549334	1.000000
60	7	-0.554168	-0.554168	1.000000
90	8	-0.554885	-0.554885	1.000000

- [6] Pageau S.S., Joseph P.F. and Biggers S.B. Jr., A finite element analysis of the singular stress fields in anisotropic materials loaded in antiplane shear. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 1995, 38, 81~97.
- [7] Barsoum R.S., Theoretical basis of the finite element iterative method for the eigenvalue problem in stationary cracks. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1988, 26, 531~539.
- [8] Sukumar N & Kumosa M., Application of the finite element iterative method to cracks and sharp notches in orthotropic media. *Int. J. Fract.*, 1992, 58, 177~192.
- [9] Yamada Y. and Okumura H., Finite element analysis of stress and strain singularity eigenstate in homogenous media or composite materials. In *Hybrid and Mixed Finite Methods* (Edited by Atluri S. N., Gallagher R. H. and Zienkiewicz O. C.) 1983, 325~343.
- [10] Chen M.C., Sze K.Y., A novel hybrid finite element analysis of bimaterial wedge problems. *Eng. Fract. Mech.*, 2001, 68, 1463~1476.
- [11] 平学成, 陈梦成. 楔形体尖端近似场的非协调有限元特征法[J]. 华东交通大学学报, 2001, 18(4): 6~11.

Antiplane Singularities near a Notch in Jointed Anisotropic Materials

CHEN Meng-cheng¹, LIANG Ping-ying¹, PING Xue-cheng²

(1. School of Civil Engineering & Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang Jiangxi 330013; 2. School of Mechanical & Electronic Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang Jiangxi 330013, China)

Abstracts: A new non-conforming finite element FE eigenanalysis method is developed to determine the order and angular variation of singular stress states at material and geometric discontinuities in anisotropic materials subject to antiplane shear loading. The singular transformation technique is not used in the assumption of displacement fields surrounding the wedge tip. The simplicity and accuracy of the method are demonstrated by comparison to several previous antiplane shear solutions. The nature and speed of the convergence of the eigensolution suggests that the solution presented here could be used in computing stress intensity factors in complex global geometries.

Key words: anisotropic material; antiplane; singular stress field; non-confirming finite element method