

文章编号: 1005—0523(2004)02—0020—04

梁对随机荷载响应的简化计算

包忠有

(华东交通大学 土木建筑学院, 江西 南昌 330013)

摘要:线性弹性体在随机荷载作用下, 只要求出复频响应函数及脉冲响应函数, 就可从激励谱密度求出响应谱密度. 在一般情况下, 计算谱密度非常繁杂, 但对于某些特殊情况, 可以进行简化, 作出响应谱密度的近似表达式.

关 键 词:线性弹性体; 响应函数; 谱密度

中图分类号:F240

文献标识码:A

1 复频响应函数及脉冲响应函数

设梁为弹性线性系统

选梁的左端为原点, OX 轴沿梁的水平轴线. 梁上任一点处 X 向下的铅垂位移 $W(x, t)$ 可用梁的主振型表示为

$$W(x, t) = \sum_r W_r(x) \xi_r(t) \quad (1)$$

式中, $W_r(x)$ 为梁的第 r 个主振型, $\xi_r(t)$ 为其相应的主坐标.

在任一瞬时, 梁的动能表达式由下式给出

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l W^2(x, t) m(x) dx$$

式中, $m(x)$ 是梁单位长度的质量. 如梁为等截面均质梁, 则 m 为常量.

将(1)式代入上式, 并考虑到主振型的正交性, 得

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[\sum_r W_r(x) \xi_r(t) \right]^2 m(x) dx \\ &= \sum_r \int_0^l \left[\frac{1}{2} m(x) W_r^2(x) \right] \xi_r^2(t) dx = \sum_r \frac{1}{2} M_r \xi_r^2(t) \end{aligned} \quad (2)$$

式中 $M_r = \int_0^l m(x) W_r^2(x) dx$ 是第 r 个广义质量.

在忽略梁的剪切影响条件下, 梁在任一瞬时的势能函数应为

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI W''^2(x, t) dx = \sum_r \int_0^l \left[\frac{1}{2} EI W_r''^2(x) \right] \xi_r^2(t) dx = \sum_r \frac{1}{2} K_r \xi_r^2(t) \quad (3)$$

式中 $K_r = \int_0^l EI W_r''^2(x) dx$ 是第 r 个广义刚度.

设谐波激励

$$p_s(t) = e^{i\omega t}$$

作用在梁上 x_s 处, 则该激励作的虚功应为

收稿日期: 2003—11—25

作者简介: 包忠有, 1950 年生, 男, 安徽人, 副教授.

$$\delta W = e^{i\omega t} \delta w(x_s, t) = \sum_r W_r(x_s) e^{i\omega t} \delta \xi_r \quad (4)$$

于是,由(2)、(3)及(4)式,利用拉格伦日方程能得到梁的第 r 个主坐标的振动微分方程有如下的形式:

$$M_r \ddot{\xi}_r + K_r(1 + i\eta_r) \dot{\xi}_r = W_r(x_s) e^{i\omega t} \quad (5)$$

式中 η_r 为第 r 个主坐标的滞后阻尼参数.

按通常解法,式(5)的解为

$$\xi_r(t) = \frac{W_r(x_s) e^{i\omega t}}{m_r(\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2)} = \frac{W_r(x_s) \cdot (\omega_r^2 - \omega^2) - i\eta_r \omega_r^2}{m_r(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + \eta_r^2 \omega_r^4} e^{i\omega t} = \frac{W_r(x_s)}{M_r} B_r(\omega) e^{i\omega t} \quad (6)$$

式中,

$$\omega_r^2 = \frac{K_r}{M_r}$$

$$B_r(\omega) = \frac{(\omega_r^2 - \omega^2) - i\eta_r \omega_r^2}{(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + \eta_r^2 \omega_r^4} \quad (7)$$

将 $\xi_r(t)$ 代入(1)式得

$$W(x, t) = \sum_r \frac{W_r(x) W_r(x_s)}{M_r} B_r(\omega) e^{i\omega t}$$

由此即得复频响应函数为

$$H_W(\omega) = \sum_r \frac{W_r(x) W_r(x_s)}{M_r} B_r(\omega) \quad (8)$$

下面再求脉冲响应函数.当梁上 x_s 处作用的不是谐波激励,而是一脉冲 $\delta(t)$,则(5)式将改为

$$M_r \ddot{\xi}_r + K_r(1 + \eta_r) \dot{\xi}_r = W_r(x_s) \delta(t) \quad (9)$$

其解为

$$\xi_r(t) = W_r(x_s) h_r(t)$$

式中 $\xi_r(t)$ 中第 r 个主坐标由于作用单位脉冲 $\delta(t)$ 引起的脉冲响应函数.把上式代入(1)式,使得到

$$h_{xs}(x, t) = \sum_r W_r(x) W_r(x_s) h_r(t) \quad (10)$$

这就是作用在 x_s 处的单位脉冲 $\delta(t)$ 引起 X 处的响应,称为脉冲响应函数.

2 多激励的复频及脉冲响应函数

若在梁上 m 个点处均作用有谐波激励 $e^{i\omega t}$,由(8)式便得到 x_j 处的复频响应函数为

$$H_{W_j}(\omega) = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^m \frac{W_r(x_j) W_r(x_s)}{M_r} B_r(\omega) \quad (11)$$

如令

$$H_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{W_r(x_j) W_r(x_k)}{M_r} B_r(\omega)$$

则有

$$H_{W_j}(\omega) = H_{j1}(\omega) + H_{j2}(\omega) + \dots + H_{jm}(\omega) \quad (12)$$

同理,若在 m 个点处同时作用有单位脉冲,由(10)式可得 x_j 处的脉冲响应函数为

$$H_{W_j}(t) = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^m W_r(x_j) W_r(x_s) h_r(t) \quad (13)$$

如令

$$h_{jk}(t) = \sum_{r=1}^n W_r(x_j) W_r(x_s) h_r(t)$$

5 响应的自谱密度及互谱密度近似计算

设梁固有频率分布稀疏,且各振型产生的响应过程与统计无关.
把前面已计算出的 $H_{jk}(\omega)$ 代入(18)及(19)式,便得到

$$\left. \begin{aligned} S_{W_j}(\omega) &= \sum_{s=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{r=1}^n \frac{W_r(x_j)W_r(x_s)}{M_r} B_r^*(\omega) S_{P_s P_l}(\omega) \frac{W_r(x_j)W_r(x_l)}{M_r} B_r(\omega) \\ S_{W_j W_k}(\omega) &= \sum_{s=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{r=1}^n \frac{W_r(x_j)W_r(x_s)}{M_r} B_r^*(\omega) S_{P_s P_l}(\omega) \frac{W_r(x_k)W_r(x_l)}{M_r} B_r(\omega) \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

由于梁属于小阻尼振动,而各固有频率之值相距较开,故在第 r 个主振型共振区域内,(8)式中只有第 r 项起主要作用,其他各项可略去不计.由此可得

$$\left. \begin{aligned} S_{W_j}(\omega) &\approx \frac{W_r(x_j)W_r(x_j)}{M_r^2} B_r^*(\omega) B_r(\omega) \sum_{s=1}^m \sum_{l=1}^m W_r(x_s) S_{P_s P_l}(\omega) W_r(x_l) \\ S_{W_j W_k}(\omega) &\approx \frac{W_r(x_j)W_r(x_k)}{M_r^2} B_r^*(\omega) B_r(\omega) \sum_{s=1}^m \sum_{l=1}^m W_r(x_s) S_{P_s P_l}(\omega) W_r(x_l) \end{aligned} \right\} \tag{21}$$

由此便得到 $S_{w_{jk}}(\omega)$ 与 $S_{W_j}(\omega)$ 之比为

$$\frac{S_{W_j W_k}(\omega)}{S_{W_j}(\omega)} = \frac{W_r(x_k)}{W_r(x_j)} \tag{22}$$

这就是说,在小阻尼振动的情况下,响应的互谱密度与自谱密度之比,近似地等于相应振型之比.

参考文献:

[1] R·W· 克拉夫著,王光远,等译,结构动力学[M].北京:高教出版社,1978.
[2] N· M· 巴巴科夫著,蔡承文,等译,振动理论[M].北京:高教出版社,1981.
[3] A· A· 安德罗诺夫著,高为炳,等译,振动理论[M].北京:高教出版社,1981.
[4] J· D· 罗布逊著,谢世浩,译,随机振动引论[M].北京:科技出版社,1982.
[5] D· E· 纽兰著,方同,等译,随机振动与谱分析概论[M].北京:科技出版社,1987.
[6] 甘幼琛,谢世浩,等,随机振动的基本理论与应用[M].北京:高教出版社,1997.
[7] 庄表中,陈乃立,等,随机振动的理论及实例分析[M].北京:高教出版社,1989.

Approximate Calculations of Stochastic Response of Elastic Beam

BAO Zhong-you

(School of Civil and Arch., East China Jiaotong Univ., Nanchang 33013, China)

Abstract: This paper studies the stocnastic resoonse of the elastic beam which is subjected to random excitations. If the dower spectral and cross spectral density function of a stationary gaussian input process are known using the unite impulse response function and complex freyuency resddnse function, the desired output dower spectral and cross spectral density function can be obtained completely. In general, it is complex to define output spectral density. However, in the special scase, if the value of frequencies are well separated, the response will be caused primarily by the mode of resonace. Thus the computations are simplified and the approximation to the sepectral density function can be obtained.

Key words: the liner elastic body; response function; spectral density