

文章编号: 1005—0523(2004)02—0044—05

无限大板中矩形裂纹 I 型应力强度因子的计算

——有限部积分边界元法

余会琴¹, 陈梦成²

(华东交通大学 土木建筑学院, 江西 南昌 330013)

摘要:建立以裂纹表面位移为未知函数的超奇异积分方程, 利用有限部积分原理和边界元法来求解该方程. 运用该方法计算出矩形裂纹的 I 型应力强度因子.

关 键 词:超奇异积分方程; 有限部积分原理; 边界元法; 矩形裂纹; I 型应力强度因子

中图分类号: O346.1

文献标识码: A

0 引 言

近几十年来, 断裂理论取得了很大的进展, 在科学与工程学的许多领域中发挥了重要作用. 自 Iaokimidis^[1]将有限部分积分的概念和方法引入断裂力学并成功地求解了超奇异积分方程以后, 许多学者^[2,3]对这种超奇异积分方程的性质、解法及其在三维单裂纹问题中的应用等作了大量的研究. 表面自由裂纹的应力强度因子的数值计算问题已基本解决, 如 Williams 及范天佑等^[4,5]工作. 但裂纹表面往往不是自由的, 而是承受载荷的, 而且非椭圆类裂纹的研究也很少. 本文将对无限大板中的矩形裂纹在受法向均布荷载时的 I 型应力强度因子进行计算.

主要是建立以裂纹表面位移为未知函数的超奇异积分方程, 用有限部积分原理和边界元法来求解此方程. 对矩形裂纹表面进行单元离散, 从而可以建立一个矩阵方程. 通过裂纹边缘的位移与应力强度因子之间的关系, 计算出矩形裂纹的 I 型应力强度因子.

1 超奇异积分方程组

Sohn^[2]已提出了无限区域内单一裂纹的超奇异积分方程组. 裂纹表面只承受法向的载荷时裂纹的超奇异方程为:

$$\frac{E}{4\pi(1-\nu^2)} \oint \frac{w}{r^3} d\xi d\eta = P_z(x, y)$$

其中, x, y, z : 整体坐标系; ξ, η : 因裂纹表面而引入的局部坐标系; w : 裂纹表面在 z 方向的位移; P_z : 作用在裂纹 z 方向的荷载; 符号 $\oint$ 表示有限部积分.

2 数值方法解超奇异积分方程组

将裂纹表面进行网格划分, 在某一点 i 方程(1)

可写为 $\sum_{j=1}^N A_{ij} w_j = -\pi P_i$

这里 $w_j = \frac{E}{4(1-\nu^2)} w_j$

A_{ij} : 待求的系数分量 w_j : j 点的 z 方向位移

P_i : 作用在 i 点的 z 方向载荷

对所有的节点以矩阵的形式写出为 $[A]\{W\} =$

收稿日期: 2003—12—16

作者简介: 余会琴(1979—), 女, 湖北潜江市人, 在读硕士研究生.

$-\pi\{p\}$

重点在于系数矩阵 A 的求法,如果作用点在积分单元上则积分 $\oint_s \frac{2}{r^3} d\xi d\eta = P_z(x,y)$ 的被积函数会出现超奇异性.若作用点在一个三角形区域内,引入局部极坐标 (r,θ) ,用有限部积分概念将二维积分化为一维积分,用高斯积分的方法就可求得单元系数矩阵的分量.若作用点在一个四边形区域内,将其分成两个三角形.一个含有作用点,另一个不含有作用点是正常积分.三角形单元的无奇异积分,可利用 7 点数值积分.根据 Hammer 积分公式引入面积坐标 (L_1,L_2,L_3) 即可.四边形单元的无奇异积分用二维的高斯积分.

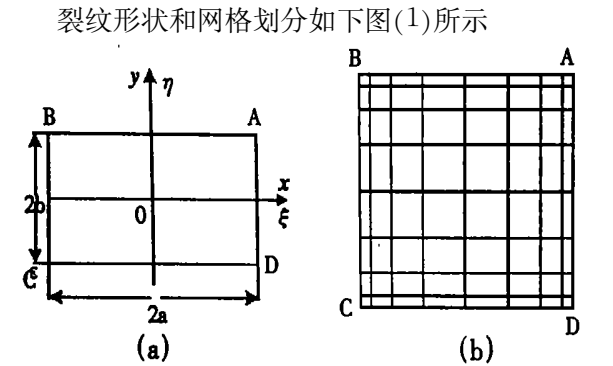
3 应力强度因子的无量纲化

根据文献[9,10]知道裂纹边缘 Q 点的应力强度因子计算公式,本文是通过沿着 Q 点的垂直距离进行外插而得到 Q 点的应力强度因子.裂纹的应力强度因子的数值计算结果用下列定义的无量纲来表示为:

$$F_I = \frac{K_I}{p\sqrt{b}}, F_{II} = \frac{K_{II}}{p\sqrt{b}}, F_{III} = \frac{K_{III}}{p\sqrt{b}}$$

p 为作用在裂纹面上的力, b 是矩形裂纹的短边的长度

4 算 例



在裂纹面作用均匀分布的法向压力荷载: $P_z(x,y)=P$,故裂纹前沿只存在 I 型断裂形态.本文的数值结果如下见图 2(a),图 2(b):

我们可以看出:在长边方向应力强度因子是随着 a/b 的比值增大而增大的;在短边方向是随着比值增大而减小的,只是在 $a/b=2$ 是出现了一次增大的现象

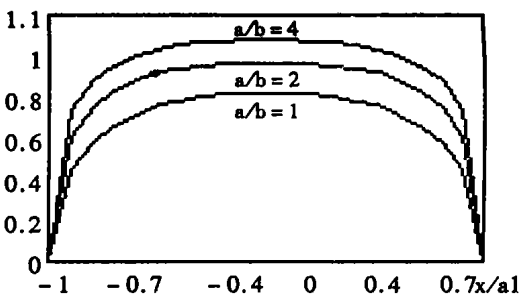


图 2(a) AB 边无量纲应力强度因子

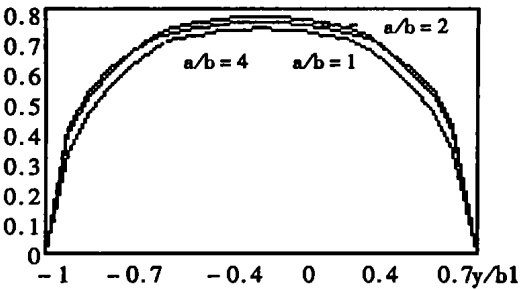


图 2(b) AD 边无量纲应力强度因子

在 $a/b=1$ 时,本文的计算结果与其他文献的比较见表 1:

表 1 $F_{I,max}$ 的比较

Source	$F_{I,max}$
本文	0.757
Isida <i>et al</i> ^[7]	0.756
石田 ^[8]	0.753
Murakami <i>et al</i> ^[6]	0.736

5 结束语

通过上述讨论,可以看出,本文用有限部积分原理和边界元法求解超奇异积分方程.继而计算出的矩形裂纹的应力强度因子与其他文献非常的接近.从而说明了本文的方法的有效性.

参考文献:

[1] Ioakimidis NI. Application of finite-part integrals to the singular integral equations of crack problems in plane and three-dimensional elasticity. *Acta Mechanica*, 1982, 45:31-47.

[2] Sohn GH. and Hong CS. Application of singular integral equations to embedded planar crack problems in finite body. *Boundary Element 2* (edited by A. C. Brebbia and G. Maier), 1985, 8-57-8-67.

[3] Martin PA. and Rizzo FJ. On boundary integral equations for crack problems. *Proceedings of the Royal Society London*, 1989, (A-421),341-355.

[4] Williams ML. On the stress distribution at the base of a station-

ary crack. J. Appl. Mech., 1957, 24, 109.

[5] 范天佑. 断裂力学基础[M]. 南京: 江苏科学技术出版社, 1978.

[6] Murakami Y. and nemat-Nassers S. Growth and stability of interacting surface flaws of arbitrary shape. Engng. Fract. Mech., 1983, 17, 193—210.

[7] Isida M. etc., Int. J. Fract., 1991, 52, 79.

[8] 石田诚. 三次元き裂問題の高精度新解析法. 日本機械学会論文集[C]. A 編, 1270—1278, 1993.

[9] 秦太验. 三维断裂力学的有限部积分—边界元法研究. 上海交通大学博士论文, 1993.

[10] 陈梦成. 两相材料界面附近(含界面)三维断裂力学问题的超奇异积分方程方法. 上海交通大学博士论文, 1997.

The Calculation of Stress Intensity Factor of Rectangular Crack
Embedded in a Infinite Plane

YU Hui-qin, CHEN Meng-cheng

(School of Civil Eng. and Arc., East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper a hypersingular integral equation with the unknown displacement is developed. To solve the equation, the principle of finite-part integral and boundary element method is used. By using the method mentioned above, the stress intensity factors of rectangle crack are calculated.

Key words: hypersingular integral equation; the principle of finite-part integral; boundary element method; rectangular crack; the stress intensity factor

(上接第 43 页)

将其完善并用于非线性分析, 求解极限承载力、动力反应, 则有待进一步研究.

参考文献:

[1] 朱聘儒. 钢—混凝土组合梁设计原理[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1989.

[2] 阎石, 刘学东. 钢—砼组合梁连接件的综合评述[J]. 沈阳建筑工程学院学报, 1996, 4(2): 258—265.

[3] J. H. 阿吉里斯. 能量原理与结构分析[M]. 北京: 科学出版社, 1998.

[4] R. W. 克拉夫. 结构动力学[M]. 北京: 科学出版社, 1981.

[5] 贺国京, 王修琼, 彭可可. 贵阳树舍六号桥计算分析报告[R]. 长沙: 中南大学桥梁与隧道研究所, 2004.

[6] 公路旧桥承载能力鉴定方法(试行)[S]. 北京: 人民交通出版社, 1988.

Investigation on Coupled Mechanics Model of Composite Beam

PENG Ke-ke¹, HE Guo-jing¹, QIN Chang-bing², DU Xue-kun², WANG Xiu-qiong¹

(1. School of Civil and Architectural Engineering, Central South University, Changsha 410075, China; 2. Guiyang Railway Substation, Guiyang 550000, China)

Abstract: On the basis of virtual work principles, combining finite elements theory with coupling theory, the coupling matrix equation is derived. Accordingly, the coupled mechanics model of composite beam is proposed in the paper. Then the method is applied to analyse the contact between RC shell and steel beam. The method is proved to be a better way by giving an example.

Key words: coupling; restriction matrix equation; composite beam; contact