

文章编号: 1005-0523(2004)02-0124-03

一类偶图的符号边控制数

徐保根

(华东交通大学 基础科学学院, 江西 南昌 330013)

摘要: 对于任意正整数 m 和 n , 构造了一类偶图(二部图) $G(m, n)$, 其阶为 $2mn$, 边数为 $3mn - m - n$, 确定了其符号边控制数为 $\gamma'_s(G(m, n)) = m + n - mn$. 从而证明了 n 阶偶图的最小符号边控制数 $B(n) < 1 + 2\sqrt{2n} - \frac{n}{2}$, 并指出了文[6]一个猜想的错误.

关 键 词: 偶图; 符号边控制数; 符号控制函数

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

本文所指的图均为无向简单图, 文中未说明的符号和术语同于文献[1].

对于一个图 G , 若 $e \in E(G)$, $N_G(e)$ 表示与 e 相邻的边的集合, 称为 e 的边邻域. $N_G[e] = N_G(e) \cup \{e\}$ 称为 e 的闭边邻域. 在不会混淆的情况下, 有时 $N_G(e)$ 和 $N_G[e]$ 分别记为 $N(e)$ 和 $N[e]$. 若 $e = uv \in E(G)$, 显然 $N_G[uv] = \{u'v' \in E(G) \mid u' = u \text{ 或 } v' = v\}$.

近几年来, 图的控制理论研究的内容越来越广泛[2~8], 各类控制概念相继产生且研究成果不断丰富. 然而, 绝大多数均属于图的点控制, 在文[2]中我们定义了一种边控制如下:

定义 1[2] 设 $G = (V, E)$ 是一个非空图, 一个函数 $f: E \rightarrow \{+1, -1\}$, 如果满足 $\sum_{e' \in N[e]} f(e') \geq 1$ 对一切 $e \in E$ 成立, 则称 f 为 G 的一个符号边控制函数.

图 G 的符号边控制数定义为 $\gamma'_s(G) = \min \{ \sum_{e \in E(G)} f(e) \mid f \text{ 为 } G \text{ 的符号边控制函数} \}$. 由于 $-|E(G)| \leq \gamma'_s(G) \leq |E(G)|$ 是平凡的界限, 因此, 定义 $\gamma'_s(\overline{K_n}) = 0$.

若 G_1 和 G_2 是两个不交的图, 则 $\gamma'_s(G_1 \cup G_2) = \gamma'_s(G_1) + \gamma'_s(G_2)$.

对于一个给定图 G , 一般来说确定其符号边控制数是困难的, 寻找其上、下界限也是非常有意义的工作[2, 5~6]. 例如, 我们有

引理 1[2] 具有 m 条边的图的最小符号边控制数为

$$\Psi(m) = 2 \lceil \frac{1}{3} \rceil \lceil \frac{\sqrt{24m+25}+6m+5}{6} \rceil - m$$

由引理 1 不难直接看出: 对任意图 G , $m = |E(G)|$, 则 $\gamma'_s(G) \geq -\frac{m}{3}$.

猜想 2[6] 对于任意非空二部图 G , 均有 $\gamma'_s(G) \geq 1$.

文[5]中证明了: 对任意非平凡的树 T , $\gamma'_s(T) \geq 1$, 这一结果虽然支持猜想 2, 但本文给出了主要给出猜想 2 的一类反例图, 从而说明了猜想 2 是错误的.

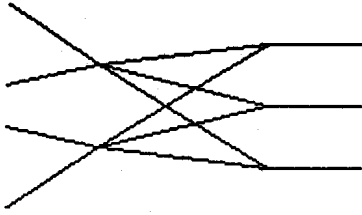
图类 $G(m, n)$ 的构造, 设 m 和 n 均为正整数, 对于完全二部图 $K_{m,n}$, 记 $V(K_{m,n}) = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $|A| = m$, $|B| = n$, $E(K_{m,n}) = \{uv \mid u \in A, v \in B\}$, 在每个顶点 $v \in A$ 处, 恰好增添 $n-1$ 条悬挂边, 在每个顶点 $v \in B$ 处, 恰好增添 $m-1$ 条悬挂边, 这样所得到的图记为 $G(m, n)$. 例如 $G(2, 3)$ 如图(1)所示. 图 $G(m, n)$ 为一个 $2mn$ 阶偶图, 其边数

收稿日期: 2003-10-08

基金项目: 江西省自然科学基金课题(0301047)

作者简介: 徐保根(1960-), 男, 江西南昌人, 教授.

为 $mn+m(n-1)+n(m-1)=3mn-m-n$.



图(1) $G(2,3)$

定理 1 对任意正整数 m 和 n , $\gamma'_s(G(m, n))=m+n-mn$

证明: 记 $G=G(m, n)$, 不失一般性, 设 $m \geq n \geq 1$. 当 $n=1$ 时, $G(m, 1)=K_{1, 2m-1}$ 为一个星, 易见 $\gamma'_s(K_{1, 2m-1})=1$, 定理成立. 下设 $m \geq n \geq 2$.

定义 $f: E(G) \rightarrow \{-1, +1\}$ 如下: 当 e 为 G 的悬挂边时 $f(e)=-1$; 当 e 为 G 的非悬挂边时 $f(e)=+1$. 不难验证 $\sum_{e' \in M[e]} f(e')=1$ 对任意 $e \in E(G)$ 成立, 因此 f 为图 G 的一个符号边控制函数, 由定义得知

$$\gamma'_s(G) \leq \sum_{e \in E(G)} f(e) = mn - (n-1)m - (m-1)n = m + n - mn \quad (1)$$

下面证明: $\gamma'_s(G) \geq m + n - mn$ (2)

设 f 为图 G 的一个符号边控制函数, 且满足 $\gamma'_s(G) = \sum_{e \in E(G)} f(e)$. 由 $G=G(m, n)$ 的构造可知: G 中有一个完全二部图 $K_{m, n}$, 记 $V(K_{m, n}) = A \cup B, A \cap B = \emptyset, |A|=m, |B|=n, E_0 = E(K_{m, n}) = \{uv \mid u \in A, v \in B\}$, 令 $A = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

由于 $m \geq n \geq 2$, 由 $G=G(m, n)$ 的构造可知, 每个顶点 $u_i (i=1, 2, \dots, m)$ 和 $v_j (j=1, 2, \dots, n)$ 在 G 中均与悬挂边相关联. 与 u_i 相关联的悬挂边中任取一条记为 $e_i (i=1, 2, \dots, m)$, 与 v_j 相关联的悬挂边中任取一条记为 $e'_j (j=1, 2, \dots, n)$, 由符号边控制函数的定义知

$$\sum_{e \in M[e_i]} f(e) \geq 1, \sum_{e \in M[e'_j]} f(e) \geq 1, \text{ 因此我们有 } \sum_{i=1}^m f(e) + \sum_{j=1}^n \sum_{e \in M[e'_j]} f(e) \geq m + n$$

上式左边的求和恰好取遍 G 的所有悬挂边各一次和所有 E_0 中边各两次, 即为 $\sum_{e \in E(G)} f(e) + \sum_{e \in E_0} f(e) \geq m + n$, 注意到 $|E_0|=mn$, 因此, $\gamma'_s(G) = \sum_{e \in E(G)} f(e) \geq m + n - \sum_{e \in E_0} f(e) \geq m + n - mn$, 即(2)式成立.

结合(1)和(2), 定理 1 证毕.

由定理 1 知, 当 $m \geq n \geq 2$ 时, 对于偶图(二部图) $G=G(m, n), \gamma'_s(G) \leq 0$, 因此, 猜想 2 是错误的.

在文[2]中, 我们确定了所有 m 条边的图的最小符号边控制数(引理 1). 但是, 要确定所有 n 阶图的最小符号边控制数是非常困难的, 即有

问题 1[2] 对每个整数 $n \geq 2$, 确定 $g(n) = \min \{ \gamma'_s(G) \mid G \text{ 是一个 } n \text{ 阶图} \}$ 的值.

即使要确定所有 n 阶二部图的最小符号边控制数也是困难的. 不过由定理 1 可以得到一个界限.

定理 2 对每个正整数 $n \geq 2$, 令 $B(n) = \min \{ \gamma'_s(G) \mid G \text{ 是一个 } n \text{ 阶二部图} \}$, 则有

$$B(n) < 1 + 2\sqrt{2n} - \frac{n}{2}$$

证明: 只需构造一个 n 阶二部图 G 使得 $\gamma'_s(G) < 1 + 2\sqrt{2n} - \frac{n}{2}$ 即可.

由于 $n \geq 2$, 取一个正整数 m 使得 $m^2 \leq \frac{n}{2} < (m+1)^2$, 令 $G_0 = G(m, m)$, 显然 G_0 是一个 $2m^2$ 阶二部图, 由定理 1 知 $\gamma'_s(G_0) = 2m - m^2$, 注意到 $n \geq 2m^2$, 因此 $m \leq \sqrt{\frac{2n}{2}}$, 由 $\frac{n}{2} < (m+1)^2$ 知: $-(m+1)^2 < -\frac{n}{2}$, 令: $s = n - 2m^2, G = G_0 \cup \bar{K}_s$, 显然 G 是一个 n 阶二部图, 且有

$$\gamma'_s(G) = \gamma'_s(G_0) = 2m - m^2 = 1 + 4m - (m+1)^2 < 1 + 2\sqrt{2n} - \frac{n}{2}, \text{ 定理 2 证毕.}$$

定理 2 只是给出了 n 阶二部图的最小符号边控制数 $B(n)$ 的一个上界, 但要确定其确切值是困难的.

猜想 A 对任意偶图 G , 若其最小度 $\delta(G) \geq 1$, 均有 $\gamma'_s(G) \geq |V(G)| - |E(G)|$.

若猜想成立, 则此下界是最好可能的. 例如, 对于树或森林 ($\delta \geq 1$) 是成立的[5], 对于图类 $G = G(m, n)$ 则等号成立.

猜想 B[6] 对于任意 n 阶图 G , 均有 $\gamma'_s(G) \leq n-1$.

若猜想成立, 则此上界是最好可能的. 例如, 对于星的 1 -细分图(即为一个星 $K_{1, s}$ 的每条边上增添一个顶点所得的图), 则等号成立. 即使对于 n 阶偶图 G , 目前知道的最好上界是 $\gamma'_s(G) \leq 2n-2$ (参见[6]). 以上两个猜想有待于进一步探讨.

参考文献:

- [1] Bondy J. A. and Murty U. S. R., Graph Theory with Applications[M]. Macmillan, London, 1977.
- [2] Baogen Xu, On signed edge domination numbers of graphs,

- Discrete Math. 2001, (239):179~189.
- [3] Z·Zhang, Baogen·Xu, Y·Li, L·Liu, A note on the lower bounds of signed domination number of a graph, Discrete Math. 1999, (195):295~298.
- [4] Baogen·Xu, On minus domination and signed domination in graphs, 数学研究与评论, 2003, (4):586~590.
- [5] 徐保根, 关于图的符号边控制数的下界[J]. 华东交通大学学报, 2004, (1).
- [6] 徐保根, 曾毅. 关于图的符号边控制数的上界[J]. 华东交通大学学报, 2002, (1):55~57.
- [7] Baogen·Xu, E·J·Cockayne, T·W·Haynes, S·T·Hedetniemi, S·Zhou, Extremal graphs for inequalities involving domination parameters, Discrete Math. 2000, (216):1~10.
- [8] Baogen Xu, Shangchao Zhou, Characterization of connected graphs with maximum domination number[J]. 数学研究与评论, 2000, (4):523~528.

Signed Edge Domination Numbers for a Class Of Bipartite Graphs

XU Bao-gen

(School of Natural Science, East China Jiaotong Univ., Nanchang 330013, China)

Abstract: For any positive integers m and n , a class of bipartite graphs $G = G(m, n)$ with $|E(G)| = 3mn - m - n$, $|V(G)| = 2mn$ and $\gamma'_s(G(m, n)) = m + n - mn$ are designed. And further, The upper bounds of the minimum signed edge domination numbers $B(n)$ for bipartite graphs of order n are given. That is, $B(n) < 1 + 2\sqrt{2n} - \frac{n}{2}$, and disprove a conjecture in[6].

Key words: bipartite graph; signed edge domination number; signed edge domination function