第21卷第2期
2004年4月

华 东 交 通 大 学 学 报
Journal of East China Jiaotong University

Vol.21 No.2
Apr., 2004

文章编号:1005—0523(2004)02—0127—02

边可迁图的线独立集

刘二根

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:证明了当群关于可迁且为阿贝尔群或幂零群时,每个非图包含两个不相交的最大线独立集.

关 键 词:边可迁图;线独立集;自同构群

中图分类号:O157.5 **文献标识码**:A

1 引 言

本文所讨论的图均为无向的简单图,$E(G)$表示图的边集,$V(G)$表示图G的点集,$\mathrm{Aut}(G)$表示自同构群,文中凡未说明的符号及术语均同文献[1].

定义1 设$L\subset \mathrm{Aut}(G)$,定义$Z=Z(L)=\{r\in L \mid$对任意$s\in L$有$rs=sr\}$.

定义2 设$L\subset \mathrm{Aut}(G)$,若对任意$e, e'\in E(G)$,存在$b\in L$,使$b(e)=e'$,则称关于$E(G)$可迁.

定义3 设$L\subset \mathrm{Aut}(G)$关于$E(G)$可迁,N是L的一个正规子群,$e\in E(G)$,定义$N(e)=\{f\in E(G) \mid$存在$r\in N$使$r(e)=f\}$.

定义4 定义因子线图H如下:

(1)$E(H)=\{N(e) \mid e\in E(G)\}$;

(2)$(N(e), N(f))\in V(H)$当且仅当存在$e_1\in N(e)$, $f_1\in N(f)$使$(e_1, f_1)\in V(G)$.

引理1 $N(e)=N(f)$充分必要条件为存在$e\in N(f)$.

证明:必要性,若$N(e)=N(f)$

因为N为正规子群,对$i\in N$有$i(e)=e$,于是$e\in N(e)$,故$e\in N(f)$.

充分性,若$e\in N(f)$,则存在$r\in N$使$r(f)=e$

(1)任取$e'\in N(e)$,则存在$r_1\in N$使$r_1(e)=e'$,于是$r_1 r(f)=r_1(e)=e'$,故$e'\in N(f)$.

(2)任取$f'\in N(f)$,则存在$r_2\in N$使$r_2(f)=f'$,于是$r_2 r^{-1}(e)=r_2(f)=f'$,故$f'\in N(e)$.

由(1)及(2)可得$N(e)=N(f)$.

引理2 $N(e)\neq N(f)$充分必要条件为$N(e)\cap N(f)=\phi$.

证明:必要性,若$N(e)\neq N(f)$

设$N(e)\cap N(f)\neq\phi$,则存在$e'\in N(e)\cap N(f)$,于是存在$r_1\in N$使$r_1(e)=e'$且$r_2\in N$,使$r_2(f)=e'$,由此推出$r_2^{-1}r_1(e)=f$,故$f\in N(e)$,由引理1得$N(e)=N(f)$与$N(e)\neq N(f)$矛盾,故$N(e)\cap N(f)=\phi$.

充分性,显然成立.

引理3 如果G, L, N, H如上定义,则H为边可迁图且L/N关于$E(H)$可迁.

2 主要定理及证明

定理1 设$L\subset \mathrm{Aut}(G)$关于$E(G)$可迁,若存在$r\in Z(L)$, $e\in E(G)$有$(e, r(e))\in V(G)$,则图G有两个不相交的最大线独立集,且每个独立集中包含β条边,其中β为G的线独立数.

证明:设$\{e_1, e_2, \cdots, e_\beta\}$为$G$的一个最大线独立集,则$\{r(e_1), r(e_2), \cdots, r(e_\beta)\}$为$G$的一个最大线独立集且与$\{e_1, e_2, \cdots, e_\beta\}$不相交.事实上,若存在

收稿日期:2003—12—05

作者简介:刘二根(1965—),男,江西省吉水人,副教授.

k,j使$(r(e_k),r(e_j))\in V(G)$，则$r(e_k,e_j)\in V(G)$，于是$r^{-1}r(e_k,e_j)\in V(G)$，故$(e_k,e_j)\in V(G)$与e_k，e_j不相邻矛盾，因此$\{r(e_1),r(e_2),\cdots,r(e_\beta)\}$为$G$的一个最大线独立集．

若$\{e_1,e_2,\cdots,e_\beta\}\cap\{r(e_1),r(e_2),\cdots,r(e_\beta)\}\neq\phi$，则存在$k,j$使$r(e_k)=e_j$，$1\leqslant k,j\leqslant\beta$．因为关于$E(G)$可迁，对$e_k$存在$b\in L$使$b(e)=e_k$，于是

$(e_k,r(e_k))=(b(e),rb(e))=(b(e),br(e))=b(e,r(e))\in V(G)$，即$(e_k,e_j)\in V(G)$与$e_k,e_j$不相邻矛盾，故$\{e_1,e_2,\cdots e_\beta\}$与$\{r(e_1),r(e_2),\cdots,r(e_\beta)\}$不相交．因此$\{e_1,e_2,\cdots,e_\beta\}$与$\{r(e_1),r(e_2),\cdots,r(e_\beta)\}$为图$G$有两个不相交的最大线独立集．

定理2　设L关于$E(G)$可迁且为阿贝尔群，则图G有两个不相交的最大线独立集，且每个独立集中包含β条边．

证明：因为G为非nK_2图，所以至少存在$e,e'\in E(G)$使$(e,e')\in V(G)$．

L关于$E(G)$可迁，存在$r\in L$使$r(e)=e'$．由L为阿贝尔群得$Z(L)=L$．于是$r\in Z(L)$，因此$(e,r(e))\in V(G)$，由定理1得图G有两个不相交的最大线独立集，且每个独立集中包含β条边．

定理3　设L关于$E(G)$可迁且为幂零群，则图G有两个不相交的最大线独立集．

证明：对$|E(G)|$采用归纳法．

当$|E(G)|=2$，不妨设G没有孤立点，则$G=P_3$，结论显然成立．

假设G_1满足定理的条件且$|E(G_1)|<|E(G)|$，图G_1有两个不相交的最大线独立集．

因为L为幂零群，所以$Z=Z(L)\neq\{i\}$

(1)若存在$r\in Z(L)$，$e\in E(G)$有$(e,r(e))\in V(G)$，则由定理1得图G有两个不相交的最大线独立集．

(2)若对所有$r\in Z(L)$，$e\in E(G)$有$(e,r(e))\notin V(G)$，则$Z(e)$为图G的一个线独立集，否则存在$r_1,r_2\in Z$使$(r_1(e),r_2(e))\in V(G)$，令$r=r_1^{-1}r_2$，则$r\in Z$，且$(e,r(e))=(e,r_1^{-1}r_2(e))=(r_1^{-1}r_1(e),r_1^{-1}r_2(e))=r_1^{-1}(r_1(e),r_2(e))\notin V(G)$与$(e,r(e))\in V(G)$矛盾，故$Z(e)$为图$G$的一个线独立集．

若$e,f\in E(G)$且$(e,f)\in V(G)$，则$Z(e)\neq Z(f)$．

把定义4中的N换成Z得图H，则由引理3可知图H满足定理的条件．

因为L为幂零群，存在$r\in Z(L)$且$r\neq i$，使$r(e)\neq e$，于是$|Z(e)|>1$，故$|E(H)|<|E(G)$，由假设图H有两个不相交的最大线独立集，不妨设为$\{Z(e_1),Z(e_2),\cdots,Z(e_k)\}$与$\{Z(f_1),Z(f_2),\cdots,Z(f_i)\}$．

下证$\{Z(e_1),Z(e_2),\cdots Z(e_k)\}$为图$G$的最大线独立集，事实上任取$e\in E(G)-\bigcup_{j=1}^{k}Z(e_j)$，因为$\{Z(e_1),Z(e_2),\cdots,Z(e_k)\}$为$H$的最大线独立集，所以存在$e_j$使$(Z(e),Z(e_j))\in V(H)$，于是存在$e'\in Z(e)$，$e'_j\in Z(e_j)$使$(e',e'_j)\in V(G)$．又$e'\in Z(e)$，所以存在$b\in Z(e)$使$b(e)=e'$，令$d=b^{-1}(e'_j)$，则$(e,d)=(b^{-1}(e'),b^{-1}(e'_j))=b^{-1}(e',e'_j)\in V(G)$，故$\{Z(e_1),Z(e_2),\cdots,Z(e_k)\}$为图$G$的最大线独立集．

同理可证$\{Z(f_1),Z(f_2),\cdots,Z(f_i)\}$也为图$G$的最大线独立集．

故$\{Z(e_1),Z(e_2),\cdots Z(e_k)\}$与$\{Z(f_1),Z(f_2),\cdots Z(f_i)\}$为图$G$的两个不相交的最大线独立集．

参考文献：

[1] F. Harary. Graph Theory[M]. Addison Wesley, Reading, MA, 1969.

[2] P. Lorimer. Vertex-transitive graphs: Symmetric graphs of prime valency. J.G.T. 1984, Vol.8.

[3] H.H.The and S.C.Shee. Algebraic Theory of Graphs[M]. Lee Kong Chain Institute of Mathematics and Cmputer Science, Singapore, 1976.

Line-independent Sets in Edge-transitive Graphs

LIU Er-gen

(School of Natural Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper, the following results are proved: Let L be transitive on $E(G)$ and abelian or nilpotent, then no nK_2 graph G has disjoint maximal line-independent Sets.

Key words: Edge-transitive Graphs; Line-independent sets; Automorphism group