

文章编号: 1005—0523(2004)02—0129—02

不分明化拓扑中 F -滤子与网的若干性质

蒋志勇

(华东交通大学 基础科学学院, 江西 南昌 330013)

摘要: 本文在[1]的不分明化拓扑新定义基础上, 给出了不分明化滤子的定义, 并且用逻辑的语义方法讨论了它的若干性质; 之后讨论了子网和网的关系; 最后给出了不分明化超滤子与超网的定义, 同时用逻辑的语义方法证明了超滤子的极限点集与附贴集的等价关系.

关 键 词: 不分明化滤子; 不分明化超网; 不分明化超滤子; 不分明化极限点集与附贴集

中图分类号: O159

文献标识码: A

0 引 言

定义 1 设 X 是一个论域, 称一元 F -谓词 $\underline{K} \in \underline{\mathcal{C}}P(X)$ 是 X 内的一个不分明化滤子, 若

$$(F1) \vdash \emptyset \notin \underline{K} \wedge \underline{K} \neq \emptyset$$

$$(F2) \vdash (\forall A)(\forall B)((A \in \underline{K}) \wedge (B \in \underline{K}) \rightarrow (A \cap B) \in \underline{K})$$

$$(F3) \vdash (\forall A)(\forall B)((A \subseteq B) \wedge (A \in \underline{K}) \rightarrow B \in \underline{K})$$

X 内所有不分明化滤子的集合记为 $\underline{F}(X)$.

定义 2 二元不分明谓词 $\Delta, \in \underline{K} \in \underline{\mathcal{C}}(F(X) \times X)$, $\Delta_\lambda, \in_\lambda \in \underline{\mathcal{C}}(F(X) \times X) (\lambda \in [0, 1])$ 分别定义如下:

$$\underline{K} \Delta x = (\forall A)(A \in N_x \rightarrow A \in \underline{K})$$

$$\underline{K} \in x = (\forall A)(A \in \underline{K} \rightarrow x \in A) \quad \underline{K} \in F(X),$$
$$x \in X$$

$$\underline{K} \Delta_{\lambda x} = (\forall A)(A \in N_x \rightarrow A \in \underline{K}_\lambda)$$

$$\underline{K}^\infty_{\lambda x} = (\forall A)(A \in \underline{K}_\lambda \rightarrow x \in \overline{A}) \quad \underline{K} \in F(X),$$
$$x \in X$$

定理 1 设 $\underline{K} \in \underline{F}(X)$, 对任意 $x \in X$, 有

$$(1)(a) \vdash (\exists)((\lambda \in [0, 1]) \wedge \lambda \wedge (\underline{K} \Delta_{\lambda x})) \rightarrow$$

$$\underline{K} \Delta x;$$

$$(b) \vdash (\exists \lambda)((\lambda \in [0, 1]) \wedge (1 - \lambda) \wedge (\underline{K}^\infty_{\lambda x})) \rightarrow \underline{K}^\infty x.$$

$$(2)(a) \vdash \underline{K} \Delta X \rightarrow (\forall \lambda)(\lambda \in [0, 1]) \rightarrow$$

$$\underline{K} \Delta_{1-\lambda x};$$

$$(b) \vdash \underline{K}^\infty X \rightarrow (\forall \lambda)(\lambda \in [0, 1]) \rightarrow$$

$$\underline{K}^\infty_{\lambda x}.$$

证明: 只证(1)(a)、(b), 至于(2)(a)、(b)类似可以证明.

$$(1)(a) [(\exists \lambda)((\lambda \in [0, 1]) \wedge \lambda \wedge (\underline{K} \Delta_{\lambda x}))]$$
$$= \sup_{\lambda \in [0, 1]} \min(\lambda, [\underline{K} \Delta_{\lambda x}])$$
$$= \sup_{\lambda \in [0, 1]} \min(\lambda, \inf_{A \notin \underline{K}_\lambda} (1 - N_x(A))) \leq \inf_{A \subseteq X} \min$$

$$(1, 1 - N_x(A) + \underline{K}(A))$$

$$= [\underline{K} \Delta x]$$

$$(b) [(\exists \lambda)((\lambda \in [0, 1]) \wedge (1 - \lambda) \wedge (\underline{K}^\infty_{\lambda x}))]$$

$$= \sup_{\lambda \in [0, 1]} \min(1 - \lambda, [\underline{K}^\infty_{\lambda x}]) =$$

收稿日期: 2003—05—10

作者简介: 蒋志勇, 1966年生, 江西宜春人, 华东交通大学副教授.

$$\begin{aligned} & \sup_{\lambda \in [0,1]} \min(1-\lambda, \inf_{A \in \underline{K}_\lambda} \bar{A}(x)) \\ & \leq \inf_{A \in \underline{K}} \min(1, 1-\underline{K}(A) + \bar{A}(x)) \\ & = [\underline{K}^\infty x] \end{aligned}$$

定理 2 设 $\underline{K} \in F(X)$, 令 $D = \{(x, A) \mid x \in A \text{ 且 } \underline{K}(A) > 0\}$, 在 D 上定义“ $\geq$ ”关系为:

$$(x, A) \geq (y, B) \quad \text{iff} \quad A \subseteq B$$

今造 $S^{\underline{K}}: D \rightarrow X$

$$(x, A) \rightarrow S^{\underline{K}}(x, A) = x, \quad (x, A) \in D$$

则有

- (1) $S^{\underline{K}} \in N(X)$;
- (2) $\vdash \underline{K} \triangle x \rightarrow S^{\underline{K}} \triangle x$; 对任意的 $x \in X$;
- (3) $\vdash S^{\underline{K}^\infty} x \rightarrow \underline{K}^\infty x$; 对任意的 $x \in X$;

证明: (1) 直接由网的定义可知: $S^{\underline{K}}$ 为 X 内的一个网.

$$\begin{aligned} (2) [\underline{K} \triangle x] &= \inf_{S^{\underline{K}} \in \bar{X}^{A=x}} \min(1, 1 - N_x(A) + \underline{K}(A)), \\ [S^{\underline{K}} \triangle x] &= \inf_{S^{\underline{K}} \not\subseteq A} \min(1 - N_x(A)), \end{aligned}$$

因为对于任意的 $A \subseteq X$, 当 $S^{\underline{K}} \not\subseteq A$ 时, 易证 $\underline{K}(A) = 0$.

$$\therefore [\underline{K} \triangle x] \geq \min \left(\inf_{S^{\underline{K}} \not\subseteq A} \min(1 - N_x(A)), \right.$$

$$\left. \inf_{S^{\underline{K}} \not\subseteq A} \min(1, 1 - N_x(A) + \underline{K}(A)) \right) = [\underline{K} \triangle x]$$

(3) 由于对任意的 $A \subseteq X$, 当 $\underline{K}(A) > 0$ 时, 有 $S^{\underline{K}} \not\subseteq A^c$, 则有

$$\begin{aligned} [\underline{K}^\infty x] &= \inf_{A \subseteq X} \min(1, 1 - \underline{K}(A) + 1 - N_x(A^c)) \\ &\geq [S^{\underline{K}^\infty} x] \end{aligned}$$

定理 3 设 $S \in N(X)$, 则对任意的 $x \in X$, (1) $\vdash S \triangle x \rightarrow S^\infty x$ 即 $\vdash \lim S \subseteq \text{adh} S$; (2) $\vdash (\forall T)((T < S) \rightarrow (S \triangle x \rightarrow T \triangle x) \wedge (T^\infty x \rightarrow S^\infty x))$, 其中“ $T < S$ ”表示 T 是 S 的子网.

证明: (1) $[S \triangle x] = \inf_{S \not\subseteq A} (1 - N_x(A)) \leq [S^\infty x]$

(2) 根据网和子网的定义易知:

$$[(\forall T)((T < S) \rightarrow (S \triangle x \rightarrow T \triangle x) \wedge (T^\infty x \rightarrow S^\infty x))] = 1$$

定理 4 设 $\underline{K} \in F(X)$ ($F(X)$) 表示 X 内的所有分明滤子构成的集合), $x \in X$, 则 $\vdash \underline{K} \triangle x \rightarrow \underline{K}^\infty x$
 $\vdash \lim \underline{K} \subseteq \text{adh} \underline{K}$

证明: 记 $S^{K^{[1]}}$ 表示由分明滤子 $\underline{K}$ 所诱导的 $\bar{X}$ 内的分明网: $S^{\underline{K}}: D \rightarrow X, (x, A) \rightarrow x, (x, A) \in D$, 其中 $D = \{(x, A) \mid x \in A \in \underline{K}\}$, $(x, A) \geq (y, B) \text{ iff } A \subseteq B$, $(D, \geq)$ 为一个方向集, 则根据 [1], 易证: $[\underline{K} \triangle x]^{[1]} = [S^{\underline{K}} \triangle x] \leq [S^{K^{[1]}} \triangle x] = [\underline{K}^\infty x]$

定义 3 (1) 称 $S \in N(X)$ 是 X 内的一个超网, 若 S 满足:

$$\vdash (\forall A)(A \subseteq X \rightarrow (S \not\subseteq A \rightarrow S \not\subseteq X - A))$$

(2) 称 $\underline{K} \in F(X)$ 是 X 内的一个超滤子, 若 $\underline{K}$ 满足:

$$\vdash (\forall A)(A \subseteq X \rightarrow (A \notin \underline{K} \rightarrow X - A \in \underline{K}))$$

注记: 根据上面的定义 3 直接易证: 若 $\underline{K} \in F(X)$ 是 X 内的一个超滤子, 则由 $\underline{K}$ 诱导出的 X 内的网 $S^{K^{[1]}}$ 是 X 内的一个超网; 反之, 若 $S \in N(X)$ 是 X 内的一个超网, 则由 S 诱导出的 $\bar{X}$ 内的滤子 $K^{S^{[1]}}$ 是 X 内的一个超滤子.

定理 5 设 $\underline{K} \in F(X)$ 是 X 内的一个超滤子, 则对任意的 $x \in X$, $\vdash \underline{K} \triangle x \leftrightarrow \underline{K}^\infty x \quad \vdash$ 即

$$\vdash \lim \underline{K} = \text{adh} \underline{K}$$

证明: 因为

$$\begin{aligned} \lim \underline{K}(x) &= [\underline{K} \triangle x] = \inf_{A^c \notin \underline{K}} (1 - N_x(A^c)) \\ &= \inf_{A \in \underline{K}} (1 - N_x(A^c)) \\ &= \inf_{A \in \underline{K}} \bar{A}(x) = [\underline{K}^\infty x] = \text{adh} \underline{K}(x) \end{aligned}$$

参考文献:

- [1] M. S. Ying, A New Approach for Fuzzy Topology (I), FSS, [J]. 39(1991), 315—321.
- [2] B. M. Pu, J. G. Jiang and S. L. Hu etc, Topology, [M]. 1985, 10, 105—107.

The Properties of Fuzzy Filter and Net in Fuzzifying Topology

JIANG Zhi-yong

(School of Natural Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper, we give the definition of fuzzifying filter, and study its properties with the semantics and the relations between subnet and net. Meanwhile, we give the definitions of fuzzifying super-filter and super-net and prove the equal relations of limit point sets and adhere point sets of super-filter with the semantics.

Key words: fuzzifying filter; fuzzifying super-net; fuzzifying super-filter; fuzzifying limit point sets and adhere point sets