文章编号：1005-0523(2004)02-0131-04

Janous 不等式的一个等价式的推广

刘 健

(华东交通大学 体育学院，江西 南昌 330013)

摘要：应用三角形几何不等式中著名的Bottema不等式等，给出了Janous不等式的一个等价形式的推广，同时提出并应用计算机验证了六个有关的猜想.

关 键 词：三角形；点；不等式

中图分类号：O.178 **文献标识码**：A

1 主要结果

从专著[1]知，奥地利数学家W.Janous在1986年曾建立了下述几何不等式：设△ABC的边BC，CA，AB与面积分别为a，b，c，△，记任意一点P到顶点A，B，C的距离PA，R_2，R_3分别为R_1，R_2，R_3，则

$$(b+c)R_1+(c+a)R_2+(a+b)R_3\geqslant 8\triangle \quad (1)$$

等号仅当△ABC为正三角形且P为其中心时成立.

在Janous不等式提出后不久，作者即已得到这一不等式的多边形推广，见文献[2].

不久前，褚小光在文献[3]中又给出了Janous不等式的以下加强：

$$(b+c)R_1+(c+a)R_2+(a+b)R_3\geqslant 2\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2} \quad (2)$$

最近，本文作者与褚小光用不同的方法(尚未公开)将Janous不等式的等价形式：

$$\frac{R_2+R_3}{h_a}+\frac{R_3+R_1}{h_b}+\frac{R_1+R_2}{h_c}\geqslant 4 \quad (3)$$

(h_a，h_b，h_c为相应边上的高线)加强为

$$\frac{R_2+R_3}{m_a}+\frac{R_3+R_1}{m_b}+\frac{R_1+R_2}{m_c}\geqslant 4 \quad (4)$$

其中m_a，m_b，m_c为相应边上的中线.

本文中，我们给出Janous不等式(1)的等价式(3)的以下推广：

定理 设△ABC与△A′B′C′的面积分别为△，△′.又P为任意一点，Q为△A′B′C′内部任一点，Q到边B′C′，C′A′，A′B′的距离分别为d_1，d_2，d_3，则

$$\frac{R_2+R_3}{d_1}+\frac{R_3+R_1}{d_2}+\frac{R_1+R_2}{d_3}\geqslant 12\sqrt{\frac{\triangle}{\triangle'}} \quad (5)$$

等号当且仅当△ABC，△A′B′C′均为正三角形且P与Q分别为它们的中心时成立.

不等式(5)在形式上非常优美，从已有的文献来看，类似的涉及两个三角形与两个动点的三角形几何不等式是十分少见的.下面，我们先给出定理的证明，然后对它作些讨论，继而提出一些有关的猜想.

2 定理的证明

引理1 设△ABC与△A′B′C′的面积分别为△，△′，则对任意一点P有

$$a'R_1+b'R_2+c'R_3\geqslant 4\sqrt{\triangle\triangle'} \quad (6)$$

收稿日期：2003-03-15

作者简介：刘 健(1963-)，男，江西兴国人，助理研究员.

等号当且仅当 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 为相似的锐角三角形，且 P 为 $\triangle ABC$ 的垂心时成立.

不等式(6)即为著名的 Bottema 不等式，见[1].

引理2 设 $\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 与外接圆半径、内切圆半径分别为 a, b, c, R, r，则对任意实数 x, y, z 有

$$(xa+yb+zc)^2 \geqslant 4(yz+zx+xy)(4R+r)r \tag{7}$$

等号仅当 $x:y:z=(b+c-a):(c+a-b):(a+b-c)$ 时成立.

不等式(7)是一个重要的加权不等式，参见[1].

定理的证明 显然以 $\frac{1}{d_2}+\frac{1}{d_3}, \frac{1}{d_3}+\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}$ 为边长可构成一个三角形，记其面积为 $\triangle_0$. 由 Heron 公式：

$$\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{8}$$

(其中 s 为 $\triangle ABC$ 的半周长)易得

$$\triangle_0=\sqrt{\frac{1}{d_1d_2d_3}\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\frac{1}{d_3}\right)}$$

根据引理1的 Bottema 不等式有

$$\left(\frac{1}{d_2}+\frac{1}{d_3}\right)R_1+\left(\frac{1}{d_3}+\frac{1}{d_1}\right)R_2+\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right)R_3 \geqslant 4\sqrt{\triangle\sqrt{\frac{1}{d_1d_2d_3}\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\frac{1}{d_3}\right)}} \tag{9}$$

接下来我们证明：

$$\frac{1}{d_1d_2d_3}\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\frac{1}{d_3}\right) \geqslant \frac{81}{\triangle'^2} \tag{10}$$

为此，又先来证有关 $\triangle ABC$ 与任意正数 x, y, z 的加权不等式：

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geqslant \frac{1296xyz\triangle^2}{(xa+yb+zc)^4} \tag{11}$$

按引理2知，欲证上式只要证：

$$16(yz+zx+xy)^2(4R+r)^2r^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geqslant 1296xyz\triangle^2,$$

两边乘以 xyz 并利用 $\triangle=rs$，即知上式等价于

$$(yz+zx+xy)^3(4R+r)^2r^2 \geqslant 81(xyz)^2\triangle^2,$$

由显然的不等式 $(yz+zx+xy)^3 \geqslant 27(xyz)^2$ 及已知的不等式(见[4])：

$$4R+r \geqslant \sqrt{3}s \tag{12}$$

即知前式成立，从而不等式(10)得证. 将不等式(11)中的 $\triangle ABC$ 换成 $\triangle A'B'C'$ 即知，对 $\triangle A'B'C'$ 与任意正数 x, y, z 有

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geqslant \frac{1296xyz\triangle'^2}{(xa'+yb'+zc')^4}$$

在上式中取 $x=d_1, y=d_2, z=d_3$，利用

$$a'd_1+b'd_2+c'd_3=2\triangle' \tag{13}$$

就得不等式(10).

根据不等式(9)与(10)就知

$$\left(\frac{1}{d_2}+\frac{1}{d_3}\right)R_1+\left(\frac{1}{d_3}+\frac{1}{d_1}\right)R_2+\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right)R_3 \geqslant 12\sqrt{\frac{\triangle}{\triangle'}},$$

这显然等价于定理的不等式(5)，容易确定(5)式等号成立的条件. 定理证毕.

3 定理的推论

在定理中令 $\triangle A'B'C'$ 全等于 $\triangle ABC$，则得有关一个三角形与两个动点的下述几何不等式：

推论1 设 $\triangle ABC$ 内部任一点 Q 到边 BC, CA, AB 的距离分别为 d_1, d_2, d_3，其余符号同上，

$$\frac{R_2+R_3}{d_1}+\frac{R_3+R_1}{d_2}+\frac{R_1+R_2}{d_3} \geqslant 12 \tag{14}$$

再特别地令 Q 为 $\triangle ABC$ 的重心，则 $d_1=\frac{1}{3}h_a$，$d_2=\frac{1}{3}h_b$，$d_3=\frac{1}{3}h_c$，则得 Janous 不等式(1)的等价式(3).

设 $\triangle A'B'C'$ 相应边上的高线分别为 h_a', h_b', h_c'，则应用重心坐标可知，定理的不等式(5)等价于

$$(x+y+z)\left(\frac{R_2+R_3}{xh_a'}+\frac{R_3+R_1}{yh_b'}+\frac{R_1+R_2}{zh_c'}\right) \geqslant 12\sqrt{\frac{\triangle}{\triangle'}} \tag{15}$$

其中 x, y, z 为任意正数.

在不等式(15)中取 $x=\sqrt{\frac{R_2+R_3}{h_a'}}$，$y=\sqrt{\frac{R_3+R_1}{h_b'}}$，$z=\sqrt{\frac{R_1+R_2}{h_c'}}$，则得

$$\left(\sqrt{\frac{R_2+R_3}{h_a'}}+\sqrt{\frac{R_3+R_1}{h_b'}}+\sqrt{\frac{R_1+R_2}{h_c'}}\right)^2 \geqslant 12\sqrt{\triangle/\triangle'} \tag{16}$$

这等价于下述不等式：

推论2 设 $\triangle A'B'C'$ 的边 $B'C', C'A', A'B'$ 分别为 a', b', c'，其余符号同上，则对任一点 P 有

$$\left[\sqrt{a'(R_2+R_3)}+\sqrt{b'(R_3+R_1)}+\sqrt{c'(R_1+R_2)}\right]^2 \geqslant 24\sqrt{\triangle\triangle'} \tag{17}$$

特别地，令 $\triangle ABC$ 为正三角形，则又得

推论3 对 $\triangle ABC$ 与任一点 P 有

$$\sqrt{R_2+R_3}+\sqrt{R_3+R_1}+\sqrt{R_1+R_2} \geqslant 6\cdot 3^{-\frac{3}{8}}\triangle^{\frac{1}{4}} \tag{18}$$

上式显然强于 Bödewadt 的不等式(见[4]):

$$R_1+R_2+R_3 \geqslant 2\cdot 3^{\frac{1}{4}}\triangle^{\frac{1}{2}} \tag{19}$$

其实,容易看出上式也为本文定理的一个推论.

4　若干猜想

下面,我们介绍由定理及其推论引出的一些尚待证实的猜想.

针对定理证明中的关键不等式(10),我们提出下述更强的不等式(将△ABC 换成△A′B′C′):

猜想 1　对△ABC 内部任一点 P 有

$$\frac{1}{w_1w_2w_3}\left(\frac{1}{w_1}+\frac{1}{w_2}+\frac{1}{w_3}\right) \geqslant \frac{81}{\triangle^2} \tag{20}$$

其中 w_1, w_2, w_3 分别为∠BPC,∠CPA,∠APB 的平分线.

如果不等式(20)成立,那么本文定理所述不等式也显然(由其证明知)可以改进.事实上,要证明较(20)为弱但更漂亮的下式:

$$\frac{1}{(w_2w_3)^2}+\frac{1}{(w_3w_1)^2}+\frac{1}{(w_1w_2)^2} \geqslant \frac{81}{\triangle^2} \tag{21}$$

似乎也不容易.目前人们建立的有关 w_1, w_2, w_3 与三角形常见元素的几何不等式十分少见,这类不等式尚有待突破.

由不等式(18),(19)以及已知的不等式:

$$R_1+R_2+R_3 \geqslant \frac{2}{3}(h_a+h_b+h_c) \tag{22}$$

受到启发,我们提出与推论 3 不分强弱但强于(22)式的下述不等式:

猜想 2　对△ABC 与任意一点 P 有

$$\sqrt{R_2+R_3}+\sqrt{R_3+R_1}+\sqrt{R_1+R_2} \geqslant 2\sqrt{h_a+h_b+h_c} \tag{23}$$

在推论 1 的不等式(14)中,令 Q 为锐角△ABC 的外心,则有 $d_1 = R\cos A, d_2 = R\cos B, d_3 = R\cos C$.从而易知对锐角△ABC 与任一点 P 有

$$R_1\left(\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}\right)+R_2\left(\frac{1}{\cos C}+\frac{1}{\cos A}\right)+R_3\left(\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}\right) \geqslant 12R \tag{24}$$

注意到 $\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C} \geqslant \frac{4}{\cos B+\cos C}$,我们发现更强的不等式:

$$\frac{R_1}{\cos B+\cos C}+\frac{R_2}{\cos C+\cos A}+\frac{R_3}{\cos A+\cos B} \geqslant 3R \tag{25}$$

很可能对任意三角形 ABC 都成立的.根据作者证明的二元对称不等式(半对称不等式):

$$\cos B+\cos C \leqslant \frac{2r_a}{m_b+m_c} \tag{26}$$

(r_a, r_b, r_c 为△ABC 相应边上的旁切圆半径)我们进一步考虑了较(25)更强的不等式,从而提出

猜想 3　符号同上,则对△ABC 与任一点 P 有

$$\frac{m_b+m_c}{r_a}R_1+\frac{m_c+m_a}{r_b}R_2+\frac{m_a+m_b}{r_c}R_3 \geqslant 6R \tag{27}$$

我们已经知道,将式(25)中的 $\cos B+\cos C$ 换成更大的值 $2\sin\frac{A}{2}$ 等后不等式不再成立.但经过考察和式 $\sum R_1/\sin\frac{A}{2}$ 的下界,我们提出以下

猜想 4　符号同上,则对△ABC 与任一点 P 有

$$\frac{R_1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{R_2}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{R_3}{\sin\frac{C}{2}} \geqslant \frac{4}{3}(r_a+r_b+r_c) \tag{28}$$

如果以上猜想成立,则由之易知成立以下有趣的几何不等式:

$$\frac{D_1R_1}{d_2+d_3}+\frac{D_2R_2}{d_3+d_1}+\frac{D_3R_3}{d_1+d_2} \geqslant \frac{2}{3}(r_a+r_b+r_c) \tag{29}$$

其中 D_1, D_2, D_3 分别表示△ABC 内部任一点 Q 到顶点 A, B, C 的距离,其余符号同前.

在不等式(14)中,令 P 为△ABC 的内心,则有 $R_1\sin\frac{A}{2} = R_2\sin\frac{B}{2} = R_3\sin\frac{C}{2} = r$,于是易知对△ABC 内部任一点 Q 有

$$\left(\frac{1}{d_2}+\frac{1}{d_3}\right)\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\left(\frac{1}{d_3}+\frac{1}{d_1}\right)\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right)\frac{1}{\sin\frac{C}{2}} \geqslant \frac{12}{r} \tag{30}$$

注意到

$$\frac{1}{d_2}+\frac{1}{d_3} \geqslant \frac{4}{d_2+d_3},\ \sin\frac{A}{2} \leqslant \frac{a}{b+c}$$

等等,我们考虑了更强式:

$$\frac{b+c}{a(d_2+d_3)}+\frac{c+a}{b(d_3+d_1)}+\frac{a+b}{c(d_1+d_2)} \geqslant \frac{3}{r} \tag{31}$$

成立的可能,结果发现上式不仅很可能成立,而且很可能还可作以下一般的推广(将 Q 换为 P 点)

猜想5 设△ABC内部任一点P到边BC，CA，AB的距离分别为r_1，r_2，r_3，△ABC的内切圆半径为r，则当$k\geqslant 1.3$或$k<0$时有

$$\frac{b+c}{a}(r_2+r_3)^k+\frac{c+a}{b}(r_3+r_1)^k+\frac{a+b}{c}(r_1+r_2)^k\geqslant 3\cdot 2^{k-1}r^k \tag{32}$$

作者目前只证明了上式当$k=2$时成立．另外，顺便指出，以上不等式等价于有关△ABC边长的加权不等式：

对任意正数x，y，z有

$$\frac{b+c}{a}(y+z)^k+\frac{c+a}{b}(z+x)^k+\frac{a+b}{c}(x+y)^k\geqslant 6\cdot 2^k\left(\frac{xa+yb+zc}{a+b+c}\right)^k \tag{33}$$

其中$k\geqslant 1.3$或$k<0$．

最后，我们给出有关Janous不等式(1)的等价式(3)的一个加权猜想不等式：

猜想6 对△ABC与任意一点P及任意实数x，y，z有

$$\frac{R_2+R_3}{h_a}x^2+\frac{R_3+R_1}{h_b}y^2+\frac{R_1+R_2}{h_c}z^2\geqslant\frac{4}{3}(yz+zx+xy) \tag{34}$$

以上提出的猜想均应用计算机作了反复的验证，成立的可能是较大的．这些猜想的解决似乎都很困难．作者愿意为第一位正确地给出六个猜想中的任一个的证明者提供500元人民币的悬奖．

参考文献：

[1] D．S．Mitrinović，J．E．Pečarić and V．Volenec，Recent Advances in Geometric Inequalities[M]，Kluwer Academic Publishers，1989．

[2] 刘　健，双圆n边形的双圆半径不等式[J]．湖南数学通讯，1988，2：17－19．

[3] 褚小光，关于三角形一动点的若干不等式[J]．滨州师专学报，2001，17(2)，34－39．

[4] O．Bottema等，单　尊译，几何不等式[M]．北京：北京大学出版社，1991．

A Extending of an Equivalent Form of the Janous Inequality

LIU Jian

(School of Physical Education，East China Jiaotong University，Nanchang 330013，China)

Abstract：Applying the well-known Bottema Inequality，In the Geometric Inequality of triangles，the extending of an equivalent form of the Janous Inequality is given．Meanwhile，six conjectures concerned are put forward and tested and verified by computer．

Key words：triangle；point；inequality