文章编号:1005-0523(2004)04-0116-03

关于图的符号星控制数

徐保根

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:引入了图的符号星控制概念,确定了一个 $n(n\geqslant4)$阶图 G 符号星控制数 $\gamma_{ss}'(G)$的界限,即$\frac{n}{2}\leqslant\gamma_{ss}'(G)\leqslant2n-4$,并确定了完全图的符号星控制数.

关键词:符号星控制函数;符号星控制数;符号边控制函数;符号边控制数

中图分类号:O157.5　　**文献标识码**:A

0 引言和定义

本文所指的图均为无向简单图,文中未说明的符号和术语同于文献[1].

对于一个图 $G=(V,E)$,$v\in V$,则 v 点的边邻域定义为$E(v)=\{uv\in E|u\in V\}$.

若 $e\in E(G)$,$N_G(e)$表示与 e 相邻的边的集合,称为 e 的边邻域. $N_G[e]=N_G(e)\cup\{e\}$称为 e 的闭边邻域.在不会混淆的情况下,有时 $N_G(e)$和$N_G[e]$分别记为 $N_G(e)$和 $N[e]$.若 $e=uv\in E(G)$,显然 $N_G[uv]=\{u'v'\in E(G)\mid u'=u$或$v'=v\}$.

近几年来,图的控制理论研究的内容越来越广泛,各类控制概念相继产生且研究成果不断丰富.然而,绝大多数均属于图的点控制,在文[2]中我们定义了一种边控制如下:

定义 1 [2] 设 $G=(V,E)$是一个非空图,一个函数 $f:E\rightarrow\{+1,-1\}$,如果满足$\sum_{e'\in N[e]}f(e')\geqslant1$对一切 $e\in E$ 成立,则称为 G 的一个符号边控制函数.图 G 的符号边控制数定义为 $\gamma_s'(G)=min\{<\sum_{e\in E[G]}f(e)|f$ 为 G 的符号边控制函数$\}$.

由于$-|E(G)|\leqslant\gamma'(G)\leqslant|E(G)|$是平凡的界限,因此,自然地定义 $\gamma_s'(\overline{K_n})=0$.

下面我们定义另一种边控制概念如下:

定义 2 设 G 是一个没有孤立顶点的图,一个函数 $f:E\rightarrow\{+1,-1\}$如果满足$\sum_{e\in E[v]}f(e)\geqslant1$ 对一切 $v\in V(G)$成立,则称 f 为图 G 的一个符号星控制函数.图 G 的符号边控制数定义为 $\gamma_{ss}'(G)=min\{\sum_{e\in E[G]}f(e)|f$ 为 G 的符号星控制函数$\}$.同样地定义式 $\gamma_{ss}'(\overline{K_n})=0$.

由上述两个定义,我们有

引理 3 对于任意两个点不相交的图 G_1 和 G_2,则有

$\gamma_{ss}'(G_1YG_2)=\gamma_{ss}'(G_1)+\gamma_{ss}'(G_2)$,$\gamma_{ss}'(G_1YG_2)=\gamma_{ss}'(G_1)+\gamma_{ss}'(G_2)$

根据上述两个定义不难看出,一个图 G 的任何一个的符号星控制函数也是 G 的符号边控制函数,因此我们有

引理 4 对任意图 G,均有 $\gamma_{ss}'(G)\geqslant\gamma_s'(G)$.

一般地说,确定一个图 G 的符号星控制数和符号边控制数 $\gamma_{ss}'(G)$是困难的,虽然文[2]中给出了$\gamma_s'(G)$的仅依赖于边数的最好下界,即确定了所有 m 条边的图的最小符号边控制数,但仅依赖于阶数

收稿日期:2004-04-10
作者简介:徐保根(1963-),男,江西南昌人,教授.

的最好上、下界限尚未发现.有一个好的猜测是:$\gamma_s'(G)\leqslant n-1$对任意$n$阶图成立.为了更好地研究图的符号边控制数,本文引入图的符号星控制概念,主要是给出了$\gamma_{ss}'(G)$仅依赖于图G的阶数的最好上、下界,并确定了完全图的符号星控制数.

1 主要结果

首先,由图的符号星控制数的定义看出:$\gamma_{ss}'(G)\leqslant|E(G)|$是平凡的上界,并且我们有

引理5 对于任意图G,则$\gamma_{ss}'(G)=|E(G)|$当且仅当$\min\{d_G(u),d_G(v)\}\leqslant 2$对任意两个相邻顶点$u$和$v$成立.

证明 $\gamma_{ss}'(G)=|E(G)|$成立$\Leftrightarrow$对图G的任意一个符号星控制函数及图G的每条边$e=uv$,均有$f(e)\leqslant 1\Leftrightarrow\min\{d_G(u),d_G(v)\}\leqslant 2$对任意两个相邻顶点$u$和$v$成立,证毕.

引理6 对于任意图G,若$\delta(G)\geqslant 3$,则图G必包含有一个长度为偶数的圈(偶圈).

证明 一个图被称为θ—图如果它是由一个圈和一条路径组成,这条路径只有两个端点是在该圈上.不难看出,每一个θ—图都包含有一个偶圈.

不失一般性,设G为一个连通图(否则考虑G的一个分支),T为G的一棵生成树,$e=uv$是T的一条悬挂边,其中$d_T(v)=1$.由于$\delta(G)\geqslant 3$,故在G中v点邻接点除u外的至少两个其它顶点u_1和u_2,令$G_1=T+\{u_1v,u_2v\}$,不难看出G_1中包含θ—子图,即为G_1中包含u、v、u_1和u_2的2—连通子图.因此G中包含一个θ—图作为子图,从而包含偶圈.证毕.

定理7 对于任意n阶图G,若$\delta(G)\geqslant 1$,则$\gamma_{ss}'(G)\geqslant\frac{n}{2}$,且此下界是最好可能的.

证明 设f是图G的一个符号星控制函数,且使得,由于$\gamma_{ss}'(G)\geqslant\sum\limits_{e\in E(G)}f(e)=\frac{1}{2}\sum\limits_{v\in V(G)}\sum\limits_{e\in E(v)}f(e)\geqslant\frac{1}{2}\sum\limits_{v\in V(G)}=\frac{n}{2}$,并且注意到$\gamma_{ss}'(g)$是一个整数,因此$\geqslant\gamma_{ss}'(G)=\left\{\frac{n}{2}\right\}$.

对于任意给定一个图G_0,在G_0的每一个顶点v处恰好增加$d_{G_0}(v)+1$条悬挂边所得的图记为G,在$E(G)$上定义一个双值函数f如下:当$e\in E(G_0)$时$f(e)=-1$;当$e\in E(G)\quad E(G_0)$时$f(e)=+1$.不难验证:f是图G的一个符号星控制函数,且$\sum\limits_{e\in E(v)}f(e)=1$对每个顶点$v\in V(G)$成立.即有$\gamma_{ss}'(G)\leqslant\sum\limits_{e\in E(G)}f(e)=\frac{n}{2}$.因此,$\gamma_{ss}'(G)=\frac{n}{2}$〗.定理7证毕.

定理8 对任意n阶图G,若$n\geqslant 4$,则$\gamma_{ss}'(G)\leqslant 2n-4$

且此上界是最好可能的.

证明 不失一般性,设$\delta(G)\geqslant 1$.

(反证法)假设$\gamma_{ss}'(G)\geqslant 2n-3$,定义一个图集

$A=\{H|\gamma_{ss}'(H)\geqslant 2|V(H)|-3$且$|V(H)|\geqslant 4\}$,令$m=\min\{|E(H)|:H\in A\}$,

由于$G\in A$,故$A\neq\varnothing$,在A中的边数为m的所有图中选取一个阶数最少的图G_1.

若$|V(G_1)|=4$,由$G_1\in A$得知$|E(G_1)|\geqslant\gamma_{ss}'(G_1)\geqslant 2|V(G_1)|-3=5$,即$G_1=K_4$或者$K_4-e$,不难验证:$\gamma_{ss}'(K_4)$且$\gamma_{ss}'(K_4-e)=3$,矛盾.

因此$|V(G_1)|\geqslant 5$,从而$\delta(G_1)\geqslant 1$(否则去掉一个孤立顶点所得的图仍在A中,这与G_1的选择矛盾),下面分两种情况:

情况1 $\delta(G_1)=1$或2时;取v_0是G_1的一个度数最小的顶点,令$H=G_1-v_0$.由于$|E(H)|=|E(G_1)|-d_{G_1}(v_0)\leqslant|E(G_1)|-1$,故$H\in A$(否则与$G_1$的选择矛盾).由于$|V(G_1)|\geqslant 5$,即有$|V(H)|\geqslant 4$,因而$\gamma_{ss}'(H)\leqslant 2|V(H)|-4$.设$f_H$为$H$的一个符号星控制函数,且使得$\gamma_{ss}'(H)=\sum\limits_{e\in E(H)}f_H(e)$,定义图$G_1$的一个符号星控制函数$f$如下:当$e\in E(H)$时,$f(e)=f_H(e)$,当$e\in E(G_1)\quad E(H)$时,$f(e)=+1$.注意到$d_{G_1}(v_0)\leqslant 2$,因此我们有$\gamma_{ss}'(G_1)\leqslant\sum\limits_{e\in E(G_1)}f(e)\leqslant\gamma_{ss}'(H)+2\leqslant 2|V(H)|-4+2=2|V(G_1)|-4$,这与$G_1\in A$矛盾.

情况2 $\delta(G_1)\geqslant 3$时;根据引理6,G_1必包含有一个偶圈C_{2t}.令$H=G_1-E(C_{2t})$,故$H\notin A$(否则与G_1的选择矛盾),注意到$|V(H)|\geqslant|V(G_1)|\geqslant 5$,因而$\gamma_{ss}'(H)\leqslant 2|V(H)|-4$.设$f_H$为$H$的一个符号星控制函数,且使得$\gamma_{ss}'(H)=\sum\limits_{e\in E(H)}f_H(e)$,定义图$G_1$的一个符号星控制函数$f$如下:当$e\in E(H)$时$f(e)=f_H(e)$;对于偶圈$C_{2t}$的边,按顺时针方向交错地定义$f$的值为$+1$和$-1$,从而有$\gamma_{ss}'(G_1)\leqslant\sum\limits_{e\in E(G_1)}f(e)=\sum\limits_{e\in E(H)}=\gamma_{ss}'(H)\leqslant 2|V(H)|-4=2|V(G_1)|-4$,这与$G_1\in A$矛盾.

结合情况1和2,我们证明了:对任意n阶图G,当$n\geqslant 4$时$\gamma_{ss}'(G)\leqslant 2n-4$.下面说明此上界是最

好可能的.

考虑 n 阶完全二部图 $K_{2,n-12}(n\geqslant 4)$,其每条边均与度为2的顶点相关联,由引理5得知 $\gamma_{ss}'(K_{2,n-2})=|E(K_{2,n-2})|=2n-4$,定理8证毕.

下面我们来确定完全图的符号星控制数.

引理9[4] (1)偶数阶完全图 K_{2n} 是一个1—因子和 $n-1$ 个生成圈的和

(2)奇数阶完全图 K_{2n+1} 是 n 个生成圈的和

定理10 设为 n 阶完全图,则

(1)当 n 为偶数时,$\gamma_{ss}'(K_n)=\frac{n}{2}$;

(2)当 n 为奇数时,$\gamma_{ss}'(K_n)=n$;

证明 (1)当 n 为偶数时,由定理7知 $\gamma_{ss}'(K_n)\geqslant\frac{n}{2}$.另一方面,根据引理9得知:$K_n$ 是一个1—因子和 $\frac{n}{2}-1$ 个生成圈和,我们定义 K_n 的一个符号星控制函数 f 如下:对于这个1—因子的每一条边 e,定义 $f(e)=1$(注意到1—因子包含 $\frac{n}{2}$ 条边);对于这 $\frac{n}{2}-1$ 个生成圈的每一个生成圈(注意到 n 为偶数)的边,f 的值交错地定义为+1和−1.我们有

$\gamma_{ss}'(K_n)\leqslant\sum_{e\in e(K_n)}f(e)=\frac{n}{2}$.因此,当 n 为偶数时 $\gamma_{ss}'(K_n)=\frac{n}{2}$.

(2)当 n 为奇数时,对于每一点 $v\in V(K_n)$ 和 K_n 的每一个符号星控制函数 f,由于 $d(v)=n-1$ 为偶数,从而 $\sum_{e\in E(v)}f(e)$ 为偶数,即有 $\sum_{e\in E(K_n)}f(e)=\frac{1}{2}\sum_{v\in V(K_n)}\sum_{e\in e(V)}f(e)\geqslant\frac{1}{2}\sum_{v\in V(K_n)}2=n$ 对于 K_n 的每一个符号星控制函数 f 成立,因此 $\gamma_{ss}'(K_n)\geqslant n$.

另一方面,根据引理9得知:K_n 是 $m=\frac{n-1}{2}$ 个生成圈的和,这些生成圈记为 $C_n^i(i=1,2,A,m)$,记 $V(K_n)=\{v_1,v_2,A,v_n\}$,注意到 n 为奇数.对于每一个生成圈 $C_n^{(i)}$ 的边,交错地定义 f 的值为+1和−1但 v_i 在 $C_n^{(i)}$ 中所关联的两条边均为+1.不难验证 f 是 K_n 的一个符号星控制函数,并且 $\sum_{e\in E(K_n)}f(e)=n$,从而 $\gamma_{ss}'(K_n)\leqslant n$,因此,当 n 为奇数时,$\gamma_{ss}'(K_n)=n$.定理10证毕.

顺便指出,在文[3]中我们证明了:当 n 为偶数时,K_n 的符号边控制数 $\gamma_s'(K_n)=\frac{n}{2}$,即 $\gamma_{ss}'(K_n)=\gamma_s'(K_n)$.而从引理4知 $\gamma_{ss}'(G)\geqslant\gamma_s'(G)$ 对任意图 G 成立,一个自然而且有趣的问题是:如何刻划满足 $\gamma_{ss}'(G)=\gamma_s'(g)$ 的图 G? 这还有待于进一步探讨.

参考文献

[1] J.A.Bondy,V.S.R.Murty,Graph Theory with Applications [M],Elsevier,Amsterdam,1976.

[2] Baogen.Xu,On signed edge domination numbers of graphs [J],Discrete Math.239 (2001) 179~189

[3] 徐保根,关于图的符号边控制数的下界[J],华东交通大学学报 1(2004),110~114.

[4] F.哈拉里,图论[M],上海:上海科学技术出版社,1980.

On Signed Star Domination Numbers of Graphs

XU Bao-gen

(School of Natural Science,East China Jiaotong University,Nanchang 330013,China)

Abstract:In this paper we introduce the concept of signed star domination number (G) $\gamma_{ss}'(G)$ of a graph G,obtain the bounds of $\gamma_{ss}'(G)$. That is,$2n-4\geqslant\gamma_{ss}'(G)\geqslant\frac{n}{2}$ holds for all graphs G without isolated vertex ,where $n=|V(G)|\geqslant 4$,and determine the signed star domination numbers of all complete graphs.

Key words:signed star domination function;signed star domination number;signed edge domination function;signed edge domination number