文章编号：1005－0523(2004)04－0119－03

Queens－图的构造

邓毅雄[1]，周尚超[2]，曾　伟[2]，王　森[2]

(华东交通大学 1.信息工程学院，2.基础科学学院 江西 南昌 330013)

摘要：一个(0,1)－矩阵A的queens－图的点集对应于A中的“1”，两个点邻接当且仅当它们对应的“1”在A的同一条线上.文献[1]引入此概念并进行了讨论，本文进一步给出queens－图的几个结论，并得到了几类新的queens－图.

关　键　词：图；(0,1)－矩阵；Queens－图；

中图分类号：O157.5　　　　　　**文献标识码**：A

0　引　言

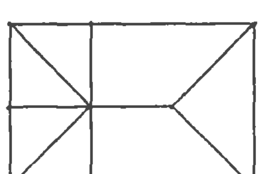
本文所讨论的图都是简单图，文中未加说明的术语和符号参阅文献[2][3]. 文献[1]引入了queens－图的概念，(0,1)－矩阵是元素为0或1的矩阵，queens－图是通过(0,1)－矩阵来划分的特殊图类，对它的研究在图论及其应用中都有一定的意义.

设 A 是一个(0,1)－矩阵. 一个图G称为矩阵 A 对应的queens－图，如果图G的点与A的1相对应，两个点邻接当且仅当它们对应在A中的1同在某行、列或某对角线上.(矩阵的行、列或对角线统称为“线”)记为G＝Q(A).

对图G，如果存在(0,1)－矩阵 A，使得G＝Q(A)，那么我们说图 G 是一个queens－图. 关于这方面研究的一个主要问题是：哪些图是queens－图？文献[1]给出了一些queens－图的结果.

确定一个图G是否为queens－图，就是确定G所对应的(0,1)－矩阵A，也就是确定A中1的坐标(i,j)，相对应地，即是确定G的点的坐标(i,j). 在讨论中，既可以给出queens－图对应的(0,1)－矩阵或其示意图，也可以给出其点对应的坐标.

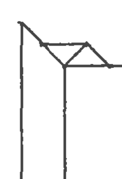
将双星图 $S(m,n)$(其中max$\{m,n\}$(2)的悬挂点依次邻接起来所得到的平面图，称为双星Halin图，记为 $S(m;n)$. 如图1所示，双星Halin图S(5;2)是queens－图，其中：(a)双星Halin图；(b)对应的(0,1)－矩阵；(c)对应的(0,1)－矩阵的示意图.



(a)

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&1\end{pmatrix}$$

(b)



(c)

图1　关于双星Halin图 $S(5;2)$

收稿日期：2004－03－04

作者简介：邓毅雄(1963－)，男，江西新干人，华东交通大学教授.

当然也可给 $S(5;2)$ 出中点对应的坐标为：(0, 0), (0,8), (1,1), (2,2), (2,8), (3,1), (4,2), (5,2), (5,8).

另外注意到，queens－图 G 对应的 (0,1)－矩阵 A 的转置矩阵 A^T 对应的 queens－图仍然是 G. 文献[1]给出了下面两个非常基本的结论：

引理 1[1]. 图 G 是 queens－图当且仅当它的点可以对应坐标 (i,j)，并且两个不同的点 (i,j) 和 (k,l) 邻接当且仅当 (1) $i=k$，或 (2) $j=l$，或 (3) $i+j=k+l$，或 (4) $i-j=k-l$.

引理 2[1]. 如果图 G 是 queens－图，那么 G 不包含导出子图 $K_{1,5}$.

设 G 是 queens－图，$uEV(G)$，$SEV(G)$. 为方便，我们分别用 H_u、V_u、P_u、M_u 表示点 u 在对应的 (0,1)－矩阵 A 中的行线、列线、正对角线、负对角线，同时用 H_s、V_s、P_s、M_s 分别表示点集 S 中所有点所在的行线、列线、正对角线、负对角线的集合，用 L_G 表示 queens－图 G 的所有线的集合. 从图形的角度看，我们注意到，在对应 (0,1)－矩阵中，任意 queens－图的每个点总是位于某些上述线的交点处，而且所有点总是落在某些上述类型的线所围成的区域内.

设 G 是 queens－图，$u\in V(G)$，若在 G 的 (0,1)－矩阵中有 k 条线上只包含 u，则称 u 为 G 对应 (0, 1)－矩阵的 k 线自由点，简称 k 线点或统称这样的点为非饱和点. 如果 $k=0$，称 u 为 G 的饱和点. 为了下文的需要，我们给出引理 3：

引理 3 圈 C_n 是 queens－图.

1 主要结果及其证明

首先我们考虑，如果图 G_1，G_2 是 queens－图，那么 $G_1\cup G_2$ 是否也是 queens－图? 我们有

定理 1 设 G_1，G_2 是 queens－图，则 $G_1\cup G_2$ 也是 queens－图.

证明 我们来构造图 $G_1\cup G_2$ 对应的 (0,1)－矩阵 A'，且 A' 的阶数足够大. 由于 G_1 是 queens－图，总可以将 G_1 中的点对应的 1 置于 (0,1)－矩阵 A' 的由 $x=a_1$, $x=a_2(a_1\leqslant a_2)$; $y=b_1$, $y=b_2(b_1\leqslant b_2)$; $y=x+c_1$, $y=x+c_2(c_1\leqslant c_2)$; $y=-x+d_1$, $y=-x+d_2(d_1\leqslant d_2)$ 所围成的区域内. 下面给出 G_2 中点的坐标，由于 G_2 是 queens－图，设 $G_2=Q(A)$，且 (0,1) 矩阵 A 是 $s(t$ 阶的. 对任意 u $(V(G_2)$，若 u 在 A 中对应的 1 的坐标为 (x,y)，我们如下给出 u 在 (0,1)－矩阵 A' 中对应的 1 的坐标 (x', y')：

$$x'=x+s+b_2-c_2+2,\ y'=y+b_2+1,$$

如此我们就构造了 $G_1\cup G_2$ 对应的 (0,1) 矩阵 A'，显然 $G_1\cup G_2=Q(A')$.

由定理 1，说明了任意 queens－图的并图仍然是 queens－图. 事实上，利用同样的思路，我们可以证明：若 $G_1\cup G_2$ 是 queens－图，那么 G_1，G_2 也分别是 queens－图. 进一步，又有

推论 1 设 $G_1, G_2, ..., G_n$ 是 queens－图，则 $G_1\cup G_2\cup...\cup G_n$ 也是 queens－图.

文献[1][4]用不同方法证明了任意不包含导出子图 $K^{1,5}$ 的树 T 都是 queens－图，另外任意完全图 Kn 是 queens－图，所以由推理 1，我们有

推论 2 任意不包含导出子图 $K_{1,5}$ 的森林 F 都是 *queens*－图.

推论 3 设 K_{ni} 是 n_i 阶 $(i=1,...,m)$ 完全图，则并图 $\bigcup_{i=1}^{m} K_{ni}$ 是 queens－图.

推论 4 设 C_{ni} 是 n_i 阶 $(i=1,...,m)$ 圈，则并图 $\bigcup_{i=1}^{m} C_{ni}$ 是 queens－图.

对图 G_1、G_2，若 $v_1\in V(G_1)$，$v_2\in V(G_2)$，将 G_1 的点 v_1 和 G_2 的点 v_2 粘合所得之图记为 $G_1\odot \mathrm{v}_1=v_2\odot \mathrm{G}_2$. 如若 G_1、G_2 都是圈，如此得到的图记为 $C_m\odot \mathrm{C}_n$，类似地，我们也记，图 G 的某点 u 与路 Pm 的一端点粘合所得之图为 $G_u\odot \mathrm{P}_m$. 在圈 C_n 的每个点上各粘上一条长为 m 的互不相交的路所得之图称为太阳图，记为 $S_n(m)$.

下面我们对这种粘合的情况进行讨论，得到如下几个结果：

定理 2 设 G 是 queens－图，u 是 G 的非饱和点，则 $G_u\odot \mathrm{P}_m$ 是 queens－图.

证明 由于 G 是 queens－图，设 $(v\in V(G)$，其在对应 (0,1)－矩阵的坐标为 (x_v, y_v)，其中点 u 的坐标为 (x_u, y_u). 同时设 G 中点的坐标位于 $x=a_1$, $x=a_2(a_1\leqslant a_2)$; $y=b_1$, $y=b_2(b_1\leqslant b_2)$; $y=x+c_1$, $y=x+c_2(c_1\leqslant c_2)$; $y=-x+d_1$, $y=-x+d_2(d_1\leqslant d_2)$ 所围成的区域内. 不失一般性，设 H_u 线中只包含 u.

下面我们给出图 $G_u\bullet P_m$ 的点 v 的坐标 (x'_v, y'_v)：

(i) 当 $v\in V(G)$ 时，$(x'_v, y'_v)=(x_v, y_v)$；

(ii) 当 $v\in V(P_m)$ 时，设 $V(P_m)$

$=\{u=v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}\}$，令

取 $v_i(i=1,2,\ldots,m-1)$的坐标对应为(x'_i, y'_i).

易于验证，$G_u \odot P_m$ 是 $V(G)\cup\{v_i \mid i=1,2,\ldots,m-1\}$对应的 queens一图.

因此，由引理 3 并连续地利用定理 2，我们有

推论 4　太阳图 $Sn(m)$是 queens一图.

定理 3　图 $C_n \odot C_m$ 是 Queens一图.

下面我们将定理 2 的结果进一步推广.

设有圈 C_n 与 C_m，以及路 $P_t(t(2)$，我们称将 P_t 的两端点分别与C_n 和 C_m 上的一个点粘合所得之图为哑铃图，记为 dumb(n, m, t).

定理 4　哑铃图 dumb(n, m, t)是 queens一图.

前面我们讨论了将 queens一图粘合得到新的 queens一图，在这里我们首先考虑将一个 queens一图的悬挂点去掉所得之图. 我们注意到，去掉一个 queens一图的悬挂点，就相当于在其对应的(0,1)一矩阵中把该悬挂点所对应的元素"1"改为元素"0". 由于它是悬挂点，这个元素的改变，不会影响其它点的坐标及其结构关系，所以我们有：

定理 5　如果 G 是 queens一图，那么去掉 G 的若干悬挂点所得之子图仍然是 queens一图.

更进一步，如果图 G 有割点 u，$H_1, H_2, \ldots, H_t$ 是$G-u$ 的一个连通分支(称为子块，由引理 2 知，$t(4)$. 如果 G 是 queens一图，那么在其对应的(0,1)一矩阵中将子图 H_i(不含 u)中的点所对应元素"1"改为元素"0"就相当于在 G 中去掉子图 H_i，这时不改变其它的元素，也没有改变其它元素的结构关系，如此得到的新的(0,1)一矩阵对应于图 $G-Hi$，所以图 $G-Hi$ 仍然是 queens一图. 从而：

定理 6　设 u 是图G 的割点，H 是 $G-u$ 一个连通分支，如果 G 是 queens一图，那么 $G-H$ 也是 queens一图.

文献[1]已经证明：当 n 为偶数时，$C_n\times P_m$ 是 queens一图，并提出了猜想：当 n 为奇数时，$C_n\times P_m$ 是 queens一图. 这个猜想目前还没有较好的结果，这里我们有

定理 7　$C_3\times P_m$ 是 queens一图.

设 $C_3\times P_m$ 的所有点为：$\{v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}\}(i=0,1,2,\ldots,m)$.

现在我们令　$x_{01}=0$，$x_{02}=2$，$x_{03}=5$，$y_{0j}=0\ (j=1,2,3)$；

$x_{11}=0$，$x_{12}=2$，$x_{13}=5$，

$y_{1j}=1(j=1,2,3)$；

$x_{2j}=6\quad(j=1,2,3)$，$y_{21}=7$，

$y_{22}=5$，$y_{23}=2$；

$x_{3j}=13$，$y_{3j}=y_{2j}(j=1,2,3)$.

当 k　1时，分四种情况进行讨论：

(i) 当 $i=4k$ 时，令

$$x_{i1}=x_{i-1,1}+1,\ x_{i2}=x_{i-1,1}+3,$$
$$x_{i3}=x_{i-1,1}+6;$$
$$y_{ij}=y_{i-1,1}+1\quad(j=1,2,3).$$

(ii) 当 $i=4k+1$ 时，令

$$x_{ij}=x_{i-1,j}(j=1,2,3);$$
$$y_{ij}=y_{i-4,1}+x_{i-2,1}-x_{i-4,1}+7\quad(j=1,2,3).$$

(iii) 当 $i=4k+2$ 时，令

$$x_{ij}=x_{i-1,j}+1(j=1,2,3);$$
$$y_{i1}=y_{i-1,1}+6,\ y_{i2}=y_{i-1,1}+4,$$
$$y_{i3}=y_{i-1,1}+1$$

(iv)当 $i=4k+3$ 时，

$$x_{ij}=y_{i-2,1}-y_{i-3,3}+x_{i-3,3}+7,$$
$$y_{ij}=y_{i-1,j}(j=1,2,3).$$

设 v_{ij}的坐标对应为$(x_{ij}, y_{ij})\ (i=0,1,2,\ldots,m, j=1,2,3)$，可以验证 $C(m,3)$是$\{v_{ij}(i=0,1,2,\ldots,m, j=1,2,3\}$对应的 queens一图.

至此，我们利用图的构造，得到了几类新的 queen一图.

参考文献：

[1]L·W·Beineke，I·Broere，M·A·Henning，Queens Graphs，Discrete Mathematics[J] 206(1999)63－75.

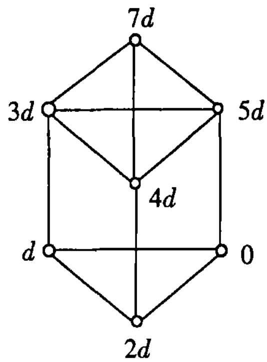
[2] G· Chartrand，L· Lesniak，Graphs and Digraphs，[M] Wadsworth（Brooks/Cole，Monterey，1996.

[3]J·A·Bondy，U·S·R·Murty，Graph Theory with Application [M]，The Macmillan Press Ltd，1976.

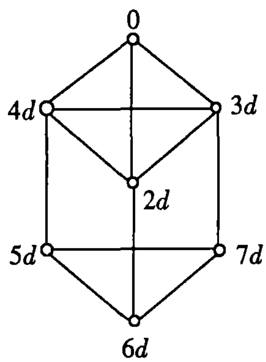
[4]邓毅雄等，关于 Queens一图的若干结果[J]，华东交通大学学报，2003，(1)：82～85.

(下转第 124 页)

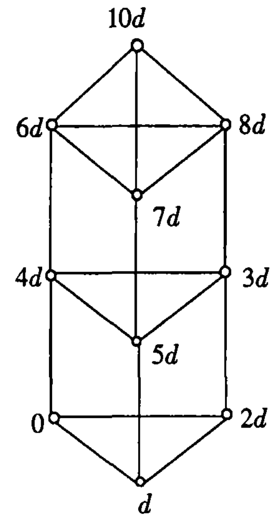
[2] Acharya B D, Hegde S M. Arithemetic graphs: Journal of Graph Theory, 1990, 18(3):275～299.
[3]邓毅雄,王森等,关于算术图的几个结果,华东交通大学学报,2003,20(4):109～111.
[4]刘二根,任飞正等,广义图 k(6,n)的边色数,华东交通大学学报,2002,19(2):81～82.



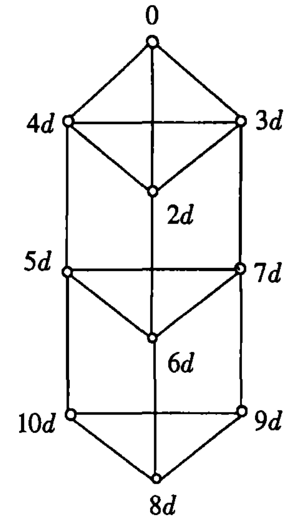
(d, d)—算术图



(2d, d)—算术图



(d, d)—算术图



(2d, d)—算术图

A Note on Arithemetic Graphs

LIU Er-gen

(School of Natural Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper, we prove the graph $K(4, n)$ is (d, d)-Arithemetic graphs or the graph $K(4, n)$ is $(2d, d)$-Arithemetic graphs.

Key words: Arithemetic graphs; labeling; graph $K(4, n)$

(上接第 121 页)

Construction of Queens Graphs

DENG Yi-xiong[1], ZHOU Shang-chao[2], ZENG Wei[1], WANG Seng[1]

(1. School of Information Engineering, 2. School of Natural Science, East China Jiaotong Univ. Nanchang 330013, China)

Abstract: The queens graph of a (0,1)—matrix A is the graph whose vertices correspond to the 1's in A and in which two vertices are adjacent if and only if some diagonal or line of A contains the corresponding 1's. A basic question is the determination of which graphs are queens graphs. Queens graphs be introduced by paper[1], This paper get some results of queens graphs, and show some graphs that is queens graphs.

Key Words: graph; queens graphs; (0, 1)—matrix