

文章编号: 1005—0523(2004)04—0122—03

关于算术图的一个注记

刘二根

(华东交通大学 基础科学学院, 江西 南昌 330013)

摘要: 证明广义图 $K(4, n)$ 是 (d, d) -算术图或 $(2d, d)$ -算术图.

关 键 词: 算术图; 图的标号; 广义图 $K(4, n)$.

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

1 引 言

图的标号是图论中极有趣的重要内容, 有着较好的应用价值和广阔的研究前景, 算术图就是对图的顶点进行一种算术标号, 从而得到边的标号为等差数列.

本文所讨论的图均为无向简单图, $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集, 文中未说明的符号及术语均同于文献^[1].

定义 1 对于一个 (p, q) -图 G , 如果存在一个 $V(G)$ 到非负整数集的一个映射 f (称为标号) 满足:

- (1) $f(u) \neq f(v)$, 其中 $u \neq v$, 且 $u, v \in V(G)$;
- (2) $\{f(u) + f(v) \mid uv \in E(G)\} = \{k, k + d, \dots, k + (q - 1)d\}$.

则称图 G 为 (k, d) -算术图.

定义 2 令 $K(4, 0) = K_4$ 且 $V(K(4, 0)) = \{u_0, v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, v_3^{(0)}\}$, 沿 $v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, v_3^{(0)}$ 出发作边 $v_1^{(0)}v_1^{(1)}, v_2^{(0)}v_2^{(1)}, v_3^{(0)}v_3^{(1)}$, 连接 $v_1^{(1)}$ 与 $v_2^{(1)}, v_2^{(1)}$ 与 $v_3^{(1)}, v_1^{(1)}$ 与 $v_3^{(1)}$, 所得到的图记为 $K(4, 1)$, 而

广义图 $K(4, n)$ 是由 $K(4, n-1)$ 通过增加新点 $v_1^{(n)}, v_2^{(n)}, v_3^{(n)}$, 及新边 $v_1^{(n-1)}v_1^{(n)}, v_2^{(n-1)}v_2^{(n)}, v_3^{(n-1)}v_3^{(n)}, v_1^{(n)}v_2^{(n)}, v_2^{(n)}v_3^{(n)}, v_1^{(n)}v_3^{(n)}$, 所得到的.

引理 1 设 $x_1, x_2, \dots, x_n \in N_0$ 且 x_i 两两不同, 令 $x'_i = x_i + \gamma$, 其中 $\gamma \in N_0$, 若 $x_i + x_j$ ($i \neq j$) 为等差数列, 则 $x'_i + x'_j$ 也为等差数列, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

证 因为 $x'_i + x'_j = (x_i + \gamma) + (x_j + \gamma) = x_i + x_j + 2\gamma$, 其中 $i, j = 1, 2, \dots, n$, 又 $x_i + x_j$ 为等差数列, 所以 $x_i + x_j + 2\gamma$ 也为等差数列, 故 $x'_i + x'_j$ 为等差数列.

2 主要结果及证明

定理 1 广义图 $K(4, n)$ 是 (d, d) -算术图.

证 设 $f: V(K(4, n)) \rightarrow N_0$ 满足:

$$f(u_0) = 4d + 3nd;$$

$$f(v_i^{(2j)}) = 3(n - 2j - 1)d + (i - 1)d, \quad i = 1, 2,$$

$$3; j = 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]; \quad (*)$$

$$f(v_i^{2j+1}) = \begin{cases} 3(n - 2j - 1)d + id, & i = 1, 2; j = 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{n-1}{2}\right]; \\ 3(n - 2j - 1)d, & i = 3; j = 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{n-1}{2}\right] \end{cases}$$

收稿日期: 2004—03—05

作者简介: 刘二根 (1965—), 男, 江西省吉水人, 副教授.

中国知网 <https://www.cnki.net>

显然标号 f 满足: $f(u) \neq f(v)$, 其中 $u \neq v$, 且 $u, v \in V(K(4, n))$.

下面证明 $\{f(u) + f(v) \mid uv \in ECK(4, n)\}$ 为等差数列, 事实上

当 $n=0$ 时, $f(u_0)=4d, f(v_1^{(0)})=0, f(v_2^{(0)})=d, f(v_3^{(0)})=2d$,

故 $\{f(u) + f(v) \mid uv \in E(K(4, 0))\} = \{d, 2d, 3d, 4d, 5d, 6d\}$ 为等差数列.

当 $n=1$ 时, $f(u_0)=7d, f(v_1^{(0)})=3d, f(v_2^{(0)})=4d, f(v_3^{(0)})=5d, f(v_1^{(1)})=d, f(v_2^{(1)})=2d, f(v_3^{(1)})=0$,

故 $\{f(u) + f(v) \mid uv \in E(K(4, 1))\} = \{d, 2d, 3d, 4d, 5d, 6d, 7d, 8d, 9d, 10d, 11d, 12d\}$ 为等差数列.

假设对 $n-1$ 有 $\{f(u) + f(v) \mid uv \in E(K(4, n-1))\} = \{d, 2d, \dots, 6nd\}$.

令 $u_0^{(n)} = u_0$;
 $u_i^{(2j)} = v_i^{(n-2j)}, i=1, 2, 3; j=0, 1, 2, \dots, [\frac{n}{2}]$;
 $u_i^{(2j+1)} = v_i^{(n-2j-1)}, i=1, 2, 3; j=0, 1, 2, \dots, [\frac{n-1}{2}]$.

则 $f(u_i^{(2j)}) = 6jd + (i-1)d, i=1, 2, 3; j=0, 1, 2, \dots, [\frac{n}{2}]$;
 $f(u_i^{(2j+1)}) =$

$\begin{cases} 3d + 6jd + id, i=1, 2; j=0, 1, 2, \dots, [\frac{n-1}{2}]; \\ 3d + 6jd, i=3; j=0, 1, 2, \dots, [\frac{n-1}{2}]. \end{cases}$
 $f(u_0^{(n)}) = 4d + 3nd$.

故当 $n=2k$ 时, $f(u_1^{(2k)}) = 6kd, f(u_2^{(2k)}) = 6kd + d, f(u_3^{(2k)}) = 6kd + 2d, f(u_0^{(2k)}) = 4d + 6kd$.

于是 $f(u_1^{(2k)}) + f(u_2^{(2k)}) = 12kd + d$,
 $f(u_1^{(2k)}) + f(u_3^{(2k)}) = 12d + 2d$.
 $f(u_2^{(2k)}) + f(u_3^{(2k)}) = 12kd + 3d$,
 $f(u_0^{(2k)}) + f(u_1^{(2k)}) = 12kd + 4d$,
 $f(u_0^{(2k)}) + f(u_2^{(2k)}) = 12kd + 5d$,
 $f(u_0^{(2k)}) + f(u_3^{(2k)}) = 12kd + 6d$.

又 $n-1=2k-1$, 由假设得 $\{f(u) + f(v) \mid uv \in E(K(4, 2k-1))\} = \{d, 2d, \dots, 12kd\}$,

同理可证当 $n=2k+1$ 时, $\{f(u) + f(v) \mid uv \in E(K(4, 2k+1))\} = \{d, 2d, \dots, 6(2k+1+1)d\}$.

所以 $\{f(u) + f(v) \mid (uv \in (4, 2k))\} = \{d, 2d, \dots, 12kd, 12kd + d, \dots, 6(2k+1)d\}$

由数学归纳法可得, $\{f(u) + f(v) \mid uv \in E(K(4, n))\}$ 为等差数列.

因此广义图 $K(4, n)$ 是 (d, d) -算术图.

定理 2 广义图 $K(4, n)$ 是 $(d+2\gamma, d)$ -算术图, 其中 $\gamma \in N_0$.

证 设 $h: V(k(4, n)) \rightarrow N_0$ 满足 $(*)$, 令 $f: V(k(4, n)) \rightarrow N_0$ 满足: $f(u) = h(u) + \gamma$, 其中 $u \in K(4, n)$, 则由定理 1 及引理 1 可得 f 满足:

- (1) $f(u) \neq f(v)$, 其中 $u \neq v$, 且 $u, v \in V(K(4, n))$;
- (2) $\{f(u) + f(v) \mid uv \in E(K(4, n))\} = \{d + 2\gamma, 2d + 2\gamma, \dots, 6(n+1)d + 2\gamma\}$.

故广义图 $K(4, n)$ 是 $(d+2\gamma, d)$ -算术图, 其中 $\gamma \in N_0$.

定理 3 广义图 $K(4, n)$ 是 $(2d, d)$ -算术图.

证 设 $f: V(K(4, n)) \rightarrow N_0$ 满足:
 $f(u_0) = 0$;
 $f(v_i^{(2j)}) =$
 $\begin{cases} 4d + 6jd, i=1; j=0, 1, 2, \dots, [\frac{n}{2}]; \\ id + 6jd, i=2, 3; j=0, 1, 2, \dots, [\frac{n}{2}]. \end{cases}$
 $f(v_i^{(2j+1)}) = 4d + id + 6jd, i=1, 2, 3; j=0, 1, 2, \dots, [\frac{n-1}{2}]$.

用类似定理 1 的证明方法可以证明标号 f 满足:

- (1) $f(u) \neq f(v)$, 其中 $u \neq v$, 且 $u, v \in V(K(4, n))$;
- (2) $\{f(u) + f(v) \mid uv \in E(K(4, n))\} = \{2d, 3d, \dots, [6(n+1)+1]d\}$.

所以广义图 $K(4, n)$ 是 $(2d, d)$ -算术图.

由定理 3 及引理 1 可得

定理 4 广义图 $K(4, n)$ 是 $(2d+2\gamma, d)$ -算术图, 其中 $\gamma \in N_0$.

下面给出 $K(4, 1)$ 和 $K(4, 2)$ 的具体标号.

- (1) $K(4, 1)$ 的标号如下:
- (2) $K(4, 2)$ 的标号如下:

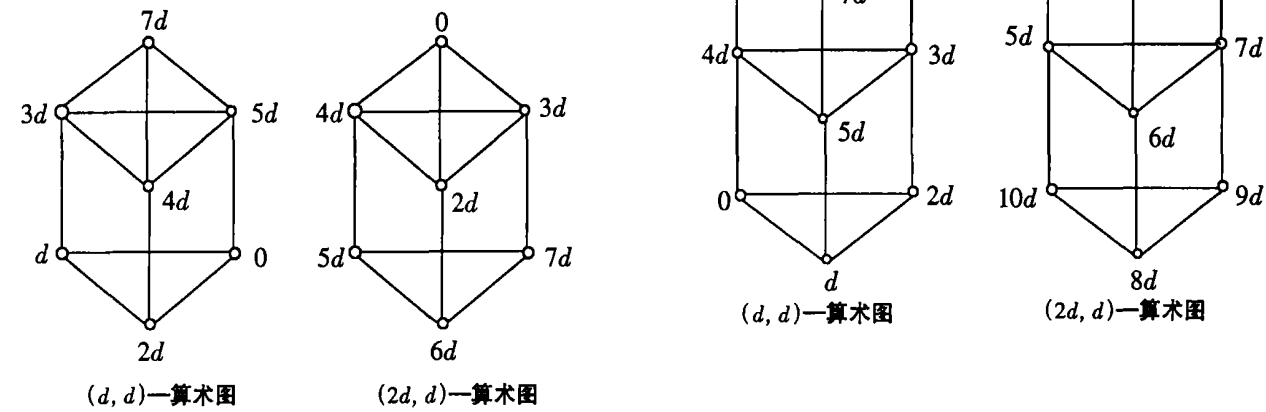
参考文献:

[1] F. Harary · Graph Theory · Addison Wesley, Reading, MA, 1969.

[2] Acharya B D, Hegde S M. Arithmetic graphs: Journal of Graph Theory, 1990, 18(3):275~299.

[3] 邓毅雄, 王森等. 关于算术图的几个结果, 华东交通大学学报, 2003, 20(4):109~111.

[4] 刘二根, 任飞正等. 广义图 $k(6, n)$ 的边色数, 华东交通大学学报, 2002, 19(2):81~82.



A Note on Arithmetic Graphs

LIU Er-gen

(School of Natural Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper, we prove the graph $K(4, n)$ is (d, d) -Arithmetic graphs or the graph $K(4, n)$ is $(2d, d)$ -Arithmetic graphs.

Key words: Arithmetic graphs; labeling; graph $K(4, n)$

(上接第 121 页)

Construction of Queens Graphs

DENG Yi-xiong¹, ZHOU Shang-chao², ZENG Wei¹, WANG Seng¹

(1. School of Information Engineering, 2. School of Natural Science, East China Jiaotong Univ. Nanchang 330013, China)

Abstract: The queens graph of a $(0, 1)$ -matrix A is the graph whose vertices correspond to the 1's in A and in which two vertices are adjacent if and only if some diagonal or line of A contains the corresponding 1's. A basic question is the determination of which graphs are queens graphs. Queens graphs be introduced by paper^[1], This paper get some results of queens graphs, and show some graphs that is queens graphs.

Key Words: graph; queens graphs; $(0, 1)$ -matrix