文章编号:1005-0523(2004)04-0125-04

线图上子泛圈性的两个独立点度和条件

胡明颖,刘展鸿

(江西师范大学 数学与信息科学学院,江西 南昌 330027)

摘要:给定一个图 G,满足$\{d(u)+d(v):uv\in E(G)\}\geq 8$,有下面主要结论.若 $n\geq 72$,围长 $g(G)\geq 5$,且 $\delta_2(G)=min\{d(u)+d(v):uv\notin E(G)\}>\sqrt{2n+1}$时,$L(G)$是子泛图.若 $n\geq 72$,围长 $g(G)\geq 4$,且 $\delta_4^2(G)-\delta_2(G)>2n$ 时,$L(G)$是子泛圈图.

关 键 词:线图,泛圈图,子泛圈图
中图分类号:O157.5 **文献标识码**:A

0 引 言

本文中仅考虑简单连通图,未定义的术语见 Bondy 和 Murty[1].记 $\delta_2(g)=\min\{d(u)+d(v):uv\notin E(G)\}$(或简记为 δ_2),$\rho_2(g)=\min\{d(u)+d(v):uv\in E(G)\}$(或简记为 ρ_2).记 $E(C)=\{uv\in E(C):u,v\in V(C)\}$,$E'(C)=\{uv\notin E(C):u,v\in V(C)\}$,$\overline{E}(C)=\{e\in E(G):e$ 与 C 中至少一个点相关联$\}$.$\varepsilon(C)$为 C 的边数,$|E(C)|=\in(C)$,$|E'(C)|=\varepsilon'(C)$,$|\overline{E}(C)|=\overline{\varepsilon}(C)$.$G$ 图的围长指的是 G 中最小圈的长度,记为 $g(G)$.图 G 的周长指的是 G 中最大圈的长度,记为 $c\gamma(G)$.图 G 的闭迹指的是 G 的欧拉子图,即 G 的每点度为偶数的连通子图.注意,据此定义,由单个顶点导出的平凡子图也是闭迹.令 $\lambda(G)=\{k:g$ 中包含长为 k 的圈$\}$,若 $\lambda(G)=\{3,4,\cdots,|V(G)|\}$,则图 G 称为泛圈图.若 $\lambda(G)=\{3,4,\cdots,c\gamma(G)\}$,则图 G 称为子泛圈图.图 G 的线图,记为 $L(G)$,其中 $V(L(G))=E(G)$,$e_ie_j\in E(L(G))$当且仅当在中相邻.

Harary 和 Nash-Williams 给出哈密顿线图的特征:

定理 1[2] 图 G 的线图是哈密顿图当且仅当 G 有一个闭迹 C,使得 $\overline{\varepsilon}(C)=|E(G)|\geqslant 3$.

定理 2[3] 图的线图包含一个长为 $k\geq 3$ 的圈当且仅当有一个闭迹 C,且 $\varepsilon(C)\leq k\leq\overline{\varepsilon}(C)$.

为了证明本文的两个主要结论,先证明下面3个引理.

引理 1 设 G 是 n 阶图,$g(G)\geq 5$,$\rho_2(G)\geq 8$,且 $L(G)$包含 C_{m+1},不包含 C_m,则有:

(i) G 有无弦圈 C_{m+1},但不包含任一长度为 k 的圈,其中$\frac{m+1}{2}<k\leq m$.

(ii)有 $m\leq(2n-\delta_2+2)/(\delta_2-2)$

证明(i)的结论可由文[4]的引理1直接推出,为了完善证明过程,在此简单叙述.

设 G 满足引理假设,由定理2,G 包含一个闭迹 C,$\varepsilon(C)\leq m+1\leq\overline{\varepsilon}(C)$.事实上,$\varepsilon(C)=m+1$,否则,如果 $\varepsilon(C)\leq m$,$L(G)$包含圈 C_m,矛盾.由定理2可知,$m\geq\triangle(G)+1$,则 $\varepsilon(C)=m+1\geq.\triangle(G)+2\geq\rho_2(G)/2+2\geq 6$.

由于 C 是一个闭迹,必存在边不交的圈 D_1,D_2,$\cdots$,D_r,使得 $C=\bigcup_{i=1}^{r}D_i$.

断言1 若 C 是 G 的一个圈,即 $\gamma=1$ 时,C 一

收稿日期:2004-04-22
作者简介:胡明颖(1979-),女,江西南昌人,江西师范大学数学与信息科学学院2002级研究生.

定是无弦的.

否则,若 C 有弦,设是 C' 包含 C 的恰好一根弦,且其它边都在 C 上的所有圈中的最长圈. 显然有, $\varepsilon(C)/2<\varepsilon(C)'<\varepsilon(C)$. 在 $\sum_{\upsilon\in V(C')} d(\upsilon)$ 中, $\overline{E}(C')$ 中每条边至多被计算了两次,在 $\sum_{e\in E(C')} d(e)$ 中, $V(C')$ 中每点被计算两次. 因此,在 $\sum_{e\in E(C')} d(e)$ 中, $\overline{E}(C')$ 中每条边至多被计算了四次. 所以, $\overline{\varepsilon}(C')=\sum_{e\in E(C')} d(e)\geq\varepsilon(C')\rho_2/4>\varepsilon(C)\rho_2/8\geq m+1$. 另一方面, $\varepsilon(C')<\varepsilon(C)=m+1$, 则 $\varepsilon(C')\leq m\leq m+1\leq\overline{\varepsilon}(C')$. 由定理 2 可知, $L(G)$ 包含圈 C_m, 矛盾. 因此,断言 1 成立.

断言 2　C 只能是 G 的一个圈,即 $\gamma=1$.

否则,若 $\gamma\geq 2$, 构造图 H 如下: $V(H)=\{D_1,D_2,\cdots,D_\gamma\}$, $D_iD_j\in E(H)$ 当且仅当 $V(D_i)\cap V(V(D_j)\neq\emptyset(i\neq j)$. 由于 C 是闭迹,必连通. 所以 H 连通. 因此,至少存在 H 的两个顶点不是 H 的割点,同样的,至少存在 j 的两个值,使得 G 的连通子图 $\bigcup_{1\leq i\leq\gamma, i\neq j} D_i$ 仍是 G 的闭迹. 不失一般性,假设 $C'=\bigcup_{i=2}^{\gamma} D_i$　$C''=D_1\cup\bigcup_{i=3}^{\gamma}D_i$ 都是 G 的闭迹. 由于 $\overline{E}(D_2-V(C''))\quad E(C')$ 中的每条边在 $\sum_{e\in E(D_2-V(C''))}(d(e)-4)$ 中最多计算四次,且 $\overline{E}(D_2-V(C''))\quad E(C')\geq|E(D_2-V(C''))|(\rho_2-4)/4$, 因此,

$$\overline{\varepsilon}(C')=|E(C')|+|\overline{E}(C')\quad E(C')|+|E(D_1)\cap\overline{E}(C')|+\overline{E}(D_2-V(C''))\quad E(C')|\geq\overline{E}(C')+|E(D_1)\cap\overline{E}(C')|+|E(D_2-V(C''))|(\rho_2-4)/4=|E(C)|-|E(D_1-V(C'))|+|E(D_2-V(C''))|(\rho_2-4)/4. \qquad (1)$$

另一方面, $L(G)$ 不包含 C_m, 则 $\overline{\varepsilon}(C')\leq m-1=\varepsilon(C)-2$　　(2)

由(1)(2)可知, $|E(D_1-V(C'))|\geq|E(D_2-V(C''))|(\rho_2-4)/4+2$, 由 $\rho_2(G)\geq 8$, $|E(D_1-V(C')|>|E(D_2-V(C''))|$. 同理,对称的可得到 $|E(D_2-V(C''))|>|E(D_1-V(C'))|$, 矛盾. 所以, γ 只能为 1. 因此,断言 2 成立.

由断言 1,断言 2 可知 G 有无弦圈 C_{m+1}, 且无圈 C_k, $\frac{m+1}{2}<k\leq m$. (i) 成立. (ii): 由 (i) 可设 C 是 G 中的无弦 $(m+1)$ 圈. 由 $\rho_2(G)\geq 8$, 对 $\forall u\upsilon\in E(G)$, $d(u)+d(\upsilon)\geq\rho_2(G)\geq 8$. 若 C 是的哈密顿圈,由 C 无弦可知, $d(u)+d(\upsilon)=4<8$, 则 C 不是 G 的哈密顿圈. 因此,可设存在点 $u\in V(G)\quad V(C)$. 由已知 $g(G)\geq 5$, u 不能与 C 上两个距离 ≤ 2 的点相邻. 但如果 u 与 C 上两个 C 距离 ≥ 3 的点相邻,会使得 G 包含圈 C', 且 $\varepsilon(C)/2<\varepsilon(C')<\varepsilon(C)$, 与 (i) 矛盾. 因此, u 至多与 C 上 1 个顶点相邻.

记 p 是圈 C 与 $G\quad C$ 之间的边数,则 $p\leq|V(G)\quad V(G)|\cdot 1=n-m-11$. 同时,由于 C 是无弦的, C 上每点都与 $(\varepsilon(C)-3$ 个点不相邻,所以 $|E'(C)|=\varepsilon'(C)=\varepsilon(C)\varepsilon(C)-3)/2=(m+1)(m-2)/2$. 在计算 $\sum_{e\in E(C')}(d(e)-4)/(m-2)\geq|E'(C)|\cdot(\delta_2-4)/(m-2)=(m+1)(\delta_2-4)/4$, 因此, $n-m-1\geq p\geq(m+1)(\delta_2-4)/2$, 有 $m\leq(2n-\delta_2+2)/(\delta_2-2)$.

引理 2: 令 G 是 $n\geq 72$ 阶图 $\delta_2(G)>\sqrt{2n+1}$, 则 $g(G)\leq\triangle(G)+1$.

证明: 由 $n\geq 72$, 则 $\delta_2\geq 13$. 设 G 满足引理假设, C 是中 G 最短圈, $\varepsilon(C)=g(G)=\gamma$ 下面分两种情况讨论:

情况 1: $\delta(G)=1$

设 $d(\upsilon)=\delta(G)=1$, 对任意与 υ 不相邻点 u, 有 $\triangle(G)+1\geq d(u)+d(\upsilon)\geq\delta_2$, 则 $\triangle(G)\geq\delta_2-1$. 假设 $\varepsilon(C)=g(G)\geq\triangle(G)+2$, 由 $\triangle(G)+1\geq\delta_2$, $\varepsilon(C)\geq\delta_2+1\geq 14$, 则对 $\forall u\in V(G)\quad V(C)$, $|\{u\upsilon\in E(G):\upsilon\in V(C)\}|\leq$　　(3)

否则 G 会产生一个比 C 更小的圈.

令 $E_1(C)=\{e=u\upsilon\in E'(C): u$ 或 υ 与 $G-V(C)$ 的孤立点相邻$\}$, $E_2(C)=E'(C)\quad E_1(C)$.

即 $E_2(C)=\{e=u\upsilon\in E'(C): u$ 和 υ 不与 $G-V(C)$ 的孤立相邻$\}$, $V_2(C)=V(G[E_2(C)]$. 则对任意 $e\in E_1(C)$, 必有 $d(e)\geq\delta_2+1$.　　(4)

因为设 $e=u\upsilon\in E_1(C)$, 不妨假设 u 与 $G-V(C)$ 的某孤立点相邻,由(3)可知 $d(x)=\delta(G)=1$, 则点 x 必与点 υ 不相邻, $d(\upsilon)+d(x)\geq\delta_2$, 得 $d(\upsilon)\geq\delta_2-1$, 同时 $d(u)\geq 2$, 因此 $d(e)\geq(\delta_2-1)+2\geq\delta_2+1$.

由 C 的选择可知,对 $\forall x\in V_2(C)$, 存在一个集合 $\{p_i\}$, $\{p_i\}$ 是 $(d(x)-2)$ 条长为 2 的路组成的集合,使得 $V(p_2)\cap V(C)=\{x\}$. $V(p_i)\cap V(p_i)=\{x\}$, $(i\neq j)$. 记 P_1 为所有这样路的集合,则 P_1 中任何两条路至多在 G 中有 1 个公共点(即若 p_i, p_j 是同一个点 x 产生的两条路,则有 $p_i\cap p_j=\{x\}$, 否则,相交为空集) $|P_1|\geq\sum_{e\in E_2(C)}(d(e)-4)/(\varepsilon(C)$

$-3)\geq|E_2(C)|(\delta_2-4)/(\gamma-3)\geq|E_2(C)|/(\gamma-3)$ (5)

因为 P_1 中每条路都会产生一个点 $u\in V(G)$ $(\overline{E}(C))$,由上面的(3),(4),(5)可知

$n\geq|\bar{\varepsilon}(C)|+|P_1|=(\sum_{e\in E(C)}(d(e)-4)/(\varepsilon(C)-3)+\varepsilon(C))+|P_1|$

$=(\sum_{e\in E(C)}d(e)/(\gamma-3))-4|E'(C)|/(\gamma-3)+\varepsilon(C)+|P_1|$

$\geq(\sum_{e\in E_1(C)}d(e)+\sum_{e\in E_2(C)}d(ee))/(\gamma-3)-2\varepsilon(C)+\varepsilon(C)+|E_2(C)|/(\gamma-3)$

$\geq((\delta_2+1)|E_1(C)|+\delta_2|E_2(C)|)/(\gamma-3)+|E_2(C)|/(\gamma-3)-\varepsilon(C)$

$\geq(\delta_2+1)(|E_1(C)+|E_2(C)||//(\gamma-3)-\varepsilon(C)=(\delta_2+1)\varepsilon(C)(\gamma-3)/2(\gamma-3)-\varepsilon(C)$

$\geq\varepsilon(C)(\delta_2-1)/2\geq(\delta_2+1)(\delta_2-1)/2>n$,矛盾.

情况2:当 $\delta(G)>1$ 时

假设 $\varepsilon(C)=g(G)\geq\triangle(G)+2$,则有 $\varepsilon(C)\geq\triangle(G)+2\geq\delta_2/2+2=(\delta_2+4)/2$.因为 $\delta_2\geq13$,$\varepsilon(C)\geq9$.由 C 的选择可知,$\delta(G)>1$,对 $\forall x\in V(C)$,存在一个集合 $\{p_i\}$,$\{p_i\}$ 是 $(d(x)-2)$ 条长为2的路组成的集合,使得 $V(p_i)\cap V(C)=\{x\}$,$V(p_i)\cap V(p_j)=\{x\}$,其中 $i\neq j$.记为 p_2 所有这样路的集合,则 p_2 中任何两条路至多在 G 中有1个公共点.且 $|P_2|=\sum_{u\in V(C)}d(u)-2$,$P_2$ 中每条路都会产生一个点 $u\in V(G)\setminus V(\overline{E}(C))$,因此有 $n\geq\bar{\varepsilon}(C)+|P_2|=\sum_{u\in V(C)}(d(u)-2)+\varepsilon(C)+|P_2|$

$=2\sum_{u\in V(C)}(d(u)-2)+\varepsilon(C)=2\sum_{e\in E(C)}(d(e)-4)/(\varepsilon(C)-3)+\varepsilon(C)$

$\geq2(\delta_2-4)\varepsilon(C)(\varepsilon(C)-3)/2(\varepsilon(C)-3)+\varepsilon(C)=(\delta_2-3)\varepsilon(C)$

$\geq(\delta_2-3)(\delta_2+4)/2>n$,矛盾.

所以,假设不成立.$f(G)\leq\triangle(G)+1$.

引理3:设 G 是 n 阶图,$g(G)\geq5$,$\rho_2(G)\geq8$,且 $g(G)(\delta_2-2)^2+2(\delta_2-2)\geq4n$,则 $\lambda(L(G))\supseteq[g(G),c\gamma(L(G))]$.

证明:设 G 满足引理假设,C 是 G 中最短圈,$\varepsilon(C)=g(G)$.

$\bar{\varepsilon}(C)=(\sum_{e\in E(C)}(d(e)-4)/\varepsilon(C)-3))$
$+\varepsilon(C)\geq(\delta_2-4)\varepsilon(C)(\varepsilon(C)-3)/2(\varepsilon(C)-3)$
$+\varepsilon(C)=(\delta_2-2)\varepsilon(C)/2=(\delta_2-2)g(G)/2$.由 $g(G)(\delta_2-2)^2+2(\delta_2-2)\geq4n$,$g(G)(\delta_2-2)/2\geq2n(\delta_2-2)-1$,则 $\bar{\varepsilon}(C)\geq2n/(\delta_2-2)-1=(2n-\delta_2+2)/(\delta_2-2)$.由引理1可知,$L(G)$ 包含每个长为 $\bar{\varepsilon}(C)$ 的圈,因为 $\varepsilon(C)\leq\bar{\varepsilon}(C)\leq c\gamma(L(G))$,则 $\lambda(L(G))\supseteq[g(G),c\gamma(L(G))]$.

定理3:设 G 是 $n\geq72$ 阶图,$g(G)\geq5$,$\rho_2\geq8$,$\delta_2>\sqrt{2n+1}$,则 $L(G)$ 是子泛圈.

证明:设 G 满足定理假设,C 是 G 中最短圈,$\varepsilon(C)=g(G)$.由 $g(G)\geq5$,$\delta_2\geq\sqrt{2n+1}$ 可得,$g(G)(\delta_2-2)^2+2(\delta_2-2)\geq4n$.由引理3可知,$\lambda(L(G))\supseteq[g(G),c\gamma(L(G))]$.又 $\rho_2\geq8$,有 $\triangle(G)\geq4$,显然 $\lambda(L(G))\supseteq[3,\triangle(G)]$.由引理2可知,$g(G)\leq\triangle(G)+1$.则 $\lambda(L(G))=[3,c\gamma(L(G))]$,所以,$L(G)$ 是子泛圈.

定理4:设 G 是 $n\geq72$ 阶图,$g(G)\geq4$,$\rho_2\geq8$,$\delta_2{}^2-\delta_2>2n$,则 $L(G)$ 是子泛圈.

证明:设 G 满足定理假设.若 $L(G)$ 不是子泛圈.$m=max\{i<c\gamma(L(G)):L(G)$ 不包含 $C_i\}$,则 $m\leq c\gamma(L(G))-1$,$L(G)$ 包含 C_{m+1},由定理2,G 包含一个闭迹 C,$\varepsilon(C)\leq m+1\leq\bar{\varepsilon}(C)$.事实上,$\varepsilon(C)=m+1$,否则,如果 $\varepsilon(C)\leq m$,$L(G)$ 包含圈 C_m.由引理1可知,C 是长为 $m+1$ 的圈,且 C 不是 G 的哈密顿圈.对任意 $\omega\in V(G)$ $V(C)$,易知,G 与 C 中至多两个点相邻,且 $N(\omega)\cap V(C)$ 的任意两个点在 C 中的距离为2,否则,G 包含一个圈 C',且 $\varepsilon(C)/2<\varepsilon(C')<\varepsilon(C)$,与引理$(i)$矛盾.由 $\delta_2^2-\delta_2>2n$,可知 $\delta_2^2>2n+\delta_2>2n+1$,则 $\delta_2>\sqrt{2n+1}$.由定理3,要使定理4成立,只须考虑 $g(G)$ 的情况.

设 C_4 是 G 的4−圈,通过类似引理3的证明过程可知,$\bar{\varepsilon}(C_4)\geq(\delta_2-2)g(G)/2=2(\delta_2-2)$,$\lambda(L(G))\supseteq[3,2\delta_2-4]$.则 $\varepsilon(C)\geq(2\delta_2-4)+2=2(\delta_2-1)$

由(6)和 $\delta_2^2-\delta_2>2n$ 可知,

$n\geq\sum_{e\in E(C)}(d(e)-4)/2(\varepsilon(C)-3)+\varepsilon(C)\geq\sum_{e\in E(C)}d(e)/2(\varepsilon(C)-3)-4\varepsilon'(C)/2(\varepsilon(C)-3)+\varepsilon(C)\geq\varepsilon'(C)\bullet\delta_2/2(\varepsilon(C)-3)-\varepsilon(C)+\varepsilon(C)=\varepsilon(C)\bullet\delta_2/4\geq2(\delta_2-1)\delta_2/4>n$,矛盾.因此,是 $L(G)$ 子泛圈.

参考文献:

[1] Bondy J. A and Murty USR, Graph Theory with Applications [M], Macmillan Press, 1976.

[2]Harary F, Nash－Williams C St J A, On spanning and dominating circuit in graphs, Can Math Bull, 1977, 20, 215－220.

[3]Bondy J.A, Pancyclic graph, pro second Louisian conference on combinztorics, graph theory and computing (Mullin R.C. et al., eds.), congresses Numerantium 3(1971)181－187.

[4]Xiong, L, Edge degree conditions for subpancyclicity in line graphs, Discrete Math, 188(1998)225－232.

Degree Sums of Two Independent Vertics Condition for Subpancyclicity in Iine Graphs

HU Ming-ying, LIU zhan-hong

(Institute of Mathemaction and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang 33027, China)

Abstract: Given a graph which satisfies conditon of . We have the following two main results. If and, is subpancyclicity. If and, is subpancyclicity.

Key words: line graph; pancyclic graph; subpancyclic graph

(上接第 112 页)

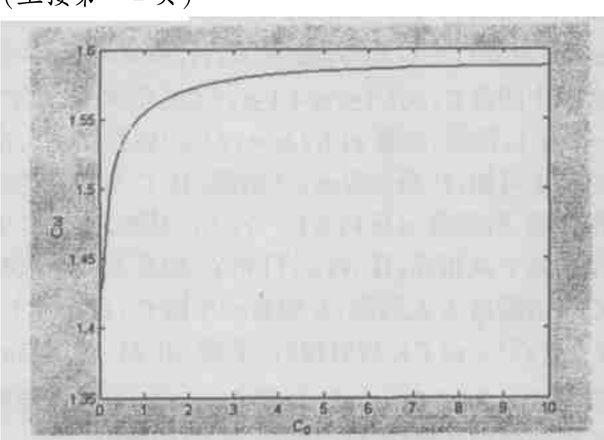

图 8 本例的 $C_m - C_0$ 曲线

3 结束语

本文基于弹塑性力学基本理论，提出了实用的辙叉矫直压下量确定方法，该方法既为辙叉矫直工作提供了理论指导和计算依据，也对研究其它复杂金属工件的矫直提供了有意义的参考.

参考文献:

[1] 崔 甫. 矫直原理与矫直机械[M]. 北京：冶金工业出版社, 2002.

[2] 朱伯驭. 弹塑性力学[M]. 北京：科学出版社, 1990.

Study on Op－bending Straigtening Theory of Crossing

CHEN Hui, XIONG Guo-liang

(1. School of Mechanical and Electrical Information; 2. Educational Administration, East China Jiaotong Uni., Nanchang 330013, China)

Abstract: The paper anaylzes the basic principles of crossing's op-bending straightening by using the basic theory of elastic-plastic mechanics. A practical computation method for the stroke of pressing down is derived, which can be used to direct the straightening operation. At the end of this paper, a calculating example is put forward.

Key words: straightening; elasticity & plasticity; stroke of pressing down; MATLAB language