第21卷第4期
2004年8月

华 东 交 通 大 学 学 报
Journal of East China Jiaotong University

Vol.21 No.4
Aug., 2004

文章编号:1005-0523(2004)04-0129-03

用拉普拉斯变换求梁的内力和变形

林定远

(浙江工业大学 浙西分校建工系,浙江 衢州 324006)

摘要:本文根据梁的变形和弯矩、剪力、荷载的关系,利用Laplace变换方法将挠度方程变换,把常用的荷载对应的变换制成表,较简便地求解梁的内力和变形.

关 键 词:挠度方程;Laplace变换;梁内力;变形

中图分类号:TB301　　**文献标识码**:A

0 引 言

现有的《材料力学》的一些著作中,求解梁的内力和变形的方法介绍的较多,常用的方法在求解受力复杂的超静定梁时,计算较烦琐容易出错。本文利用拉普拉斯(Laplace)变换解常微分方程十分方便的特点,将挠度方程进行拉氏变换,并将常用荷载对应的变换计算成表,引用表中的结果,较为简便地求解受力复杂的等截面刚度直梁的内力和变形。

1 挠度方程的拉普拉斯(Laplace)变换

一全长为等截面刚度的直梁,若将作用与该梁的力作为 x 的函数 $f(x)$,那么根据:

$\frac{dM}{dx}=Q(x)$, $\frac{dQ}{dx}=f(x)$, $\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{M}{EI}$ 的关系

可得:
$$\frac{d^4v}{dx^4}=\frac{f(x)}{EI} \tag{A}$$

其中 M 为弯矩,Q 为剪力,v 为挠度,EI 为截面刚度,x 为以梁左端为原点向右为正的截面位置。

(A) 方程可以用拉普拉斯变换求解,通过拉氏变换 (A) 可变为:

$$v=\frac{1}{EI}L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s^4}\right\}+v_0+v_0^{(1)}x+v_0^{(2)}\frac{x^2}{2}+v_0^{(3)}\frac{x^3}{6} \tag{B}$$

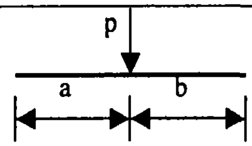
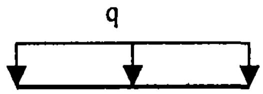
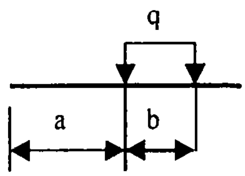
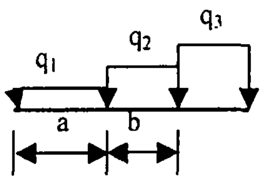
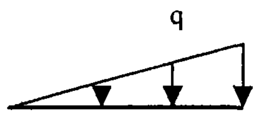
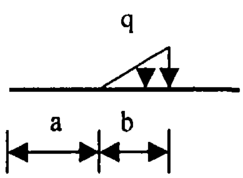
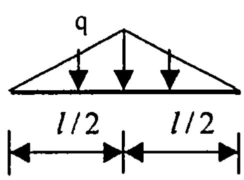
(B) 中,s 一般为复数;$F(S)$ 为 $f(x)$ 的象函数;$L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s^4}\right\}$ 为逆变换;v_0,$v_0^{(1)}$,$v_0^{(2)}$,$v_0^{(3)}$ 分别表示 $x=0$ 处的 v,$\frac{dv}{dx}$,$\frac{d^2v}{dx^2}$,$\frac{d^3v}{dx^3}$,因而它们分别表示:v_0 为梁左端挠度,$v_0^{(1)}$ 为梁左端转角,$EIv_0^{(2)}$ 为梁左端弯矩,$EIv_0^{(3)}$ 为梁左端剪力。

规定 $f(x)$ 从上向下为正,剪力从上向下为正,从截面左边考虑,弯矩顺时针为负,为了利用 (B) 式计算,先对各种荷载求 $L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s^4}\right\}$,再根据梁的边界条件确定 v_0,v_0^{-1},$v_0^{(2)}$,$v_0^{(3)}$,这样可以求得 v,然后可依次求转角,弯矩,剪力和支反力。

通过计算,常用的荷载图对应的 $L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s^4}\right\}$ 列表如下:

收稿日期:2004-04-22

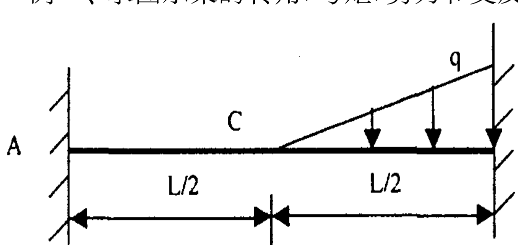
作者简介:林定远(1966-),男,浙江江山人,浙江工业大学浙西分校建工系讲师.

序号	受力图(梁的长为 l)	$L^{-1}\{F(s)/s^4\}$ $0\leqslant x\leqslant a$	$a\leqslant x\leqslant a+b$	$a+b<x\leqslant l$
a		0	$P(x-a)^3/6$	
b				$qx^4/24$
c		0	$P(x-a)^3/24$	$q[(x-a)^4-(x-a-b)^4]/24$
d		$\dfrac{q_1x^4}{24}$	$\dfrac{q_1x^4}{24}+(q_2-q_1)\dfrac{(x-a)^4}{24}$	$\dfrac{q_1x^4}{24}+\dfrac{q_2-q_1}{24}+\dfrac{(q_1-q_1)(x_a)^4}{24}+\dfrac{(q_3-q_2-q_1)(x-a-b)^4}{24}$
e				$\dfrac{qx^5}{120l}$
f		0	$\dfrac{q(x-a)^5}{120b}$	$\dfrac{q}{b}[\dfrac{(x-a)^5}{120}-\dfrac{(x-a-b)^5}{120}-b\dfrac{(x-a-b)^4}{24}]$
g		$\dfrac{qx^5}{60l}$	$\dfrac{qx^5}{60l}-\dfrac{q(x-\frac{l}{2})^5}{30l}$	

* 如果是几种荷载一起作用可将其分别叠加在一起

2 算 例

例一、求图示梁的转角，弯矩，剪力和支反力



解：利用 $Laplace$ 变换求解

$x=0 \quad v_A=v_A^{(1)}=0$ 根据表中 f 和 e 结果可得：

CB 段：$v=\dfrac{1}{EI}\dfrac{q}{l/2}\dfrac{(x-l/2)^5}{120}+v_A^{(2)}\dfrac{x^2}{2}+v_A^{(3)}\dfrac{x^3}{6}$

$$v_B=0=\frac{q}{60EIl}(\frac{1}{2})^5+v_A^{(2)}\frac{l^2}{2}+v_A^{(3)}\frac{l^3}{6}$$

可得：$3v_A^{(2)}+v_A^{(3)}l=-\dfrac{ql^3}{320EI}$ (1)

$$v_B^{(1)}=0=\frac{q}{12EIl}(\frac{1}{2})^4+v_A^{(2)}l+v_A^{(3)}\frac{l^2}{2}$$

得：$2v_A^{(2)}+v_A^{(3)}l=-\dfrac{ql^2}{96EI}$ (2)

由<1>,<2>式得：$v_A^{(2)}=\dfrac{7ql^2}{960EI}=-\dfrac{M_A}{EI}$

$v_A^{(3)}=-\dfrac{ql}{40EI}=\dfrac{R_A}{EI}$

A 的支反力为：$M_A = -\frac{7ql^2}{960}$　$R_A = \frac{ql}{40}$

AC 段：$v = \frac{q}{EI}\left(\frac{7}{1920}l^2x^2 - \frac{lx^3}{240}\right)$

CB 段：$V = \frac{q}{EI}\left[\frac{(x-l/2)^5}{60l} + \frac{7}{1920}l^2x^2 - \frac{lx^3}{240}\right]$

CB 段：$\frac{dv}{dx} = \frac{q}{EI}\left(\frac{7}{960}l^2x - \frac{lx^2}{80}\right)$

$M(x) = ql\left(\frac{7}{960} - \frac{x}{40}\right)$　$Q(x) = -\frac{ql}{40}$

CB 段：$\frac{dv}{dx} = \frac{q}{EI}\left[\frac{1}{12l}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right.$

$\left.4 + \frac{7}{960}l^2x - \frac{lx^2}{80}\right]$

$M(x) = q\left[\frac{1}{3l}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 + \frac{7}{960}l^2 - \frac{lx}{40}\right]$

$Q(x) = q\left[\frac{1}{l}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{l}{40}\right]$

$M_B = M(l) = \frac{2l}{320}ql^2$　$R_B = Q(l) = \frac{9}{40}ql$

2 结　论

由以上两例可以看出，利用拉普拉斯变换方法，在求解受力复杂的等截面刚度超静定梁内力和变形时很方便。但对于变截面刚度梁，因为 EI 是 x 的函数，(A)式就变为变系数微分方程，很难求解。

参考文献：

[1] 刘鸿文．材料力学[M]．北京：高等教育出版社，1991．

[2] [日]小井土正六．材料力学简介[M]．北京：国防工业大学出版社，1989．

Seeking for Internal Force and Deformation of Beam with Laplace Shift

LIN Ding-yuan

(West Branch of Zhejiang University of Technology, Quzhou 324006, China)

Abstract: In this article, based on the relation of deformation of beam to bending moment, shear force and load, the bending deflection equation is changed by means of Laplace Shift and a form of the corresponding shifts of the usual loads is compiled. Therefore, the internal force and deformation of beam can be relatively easily sought.

Key words: bending deflection equation; Laplace Shift; internal force and deformation of beam