第21卷第4期
2004年8月

华 东 交 通 大 学 学 报
Journal of East China Jiaotong University

Vol.21 No.4
Aug., 2004

文章编号:1005－0523(2004)04－0135－03

一个随机环境下的AR(1)-ARCH(1)模型的极限行为

肖新玲,俞　政

(中南大学 数学科学与计算技术学院,长沙 410075)

摘要:沿用[3]的思想,主要借助一般状态空间上马氏链的遍历性理论对随机环境下的AR(1)-ARCH(1)模型进行分析,研究其确定的迭代序列的极限行为,得到了它在某种意义下以几何速率收敛的充分条件.该模型反映了动力系统受随机环境干扰的现象,能更好地拟合现实世界中的诸多实际问题.

关　键　词:马氏链;随机环境;伴随几何遍历

中图分类号:F045.3　　**文献标识码**:A

0　引　言

最近的二十多年里,非线性时间序列逐渐被重视,从而也得到了较快的发展.目前在经济、环境、生物、气象等众多倍受人类关注的领域,非线性时间序列都显示出其解决实际问题的重大作用.然而当今被广泛研究的非线性时间序列模型中,其干扰为单一白噪声序列.这类模型有其明显的局限性:对系统的干扰没有受到环境突变的影响.但是在现实生活中,一般而言对系统的干扰是要受到环境影响的;当环境有明显变化时,干扰就会随之发生变化.鉴于这种考虑,本文所讨论的随机环境下的AR(1)-ARCH(1)模型反映了动力系统受随机环境干扰的现象,能更好地拟合现实世界中的诸多实际问题.侯振挺、俞政等人在这方面已做了相关的探讨和分析.本论文沿用他们的思想,主要借助一般状态空间上马氏链的遍历性理论对随机环境下的AR(1)-ARCH(1)模型进行分析,研究其所确定的迭代序列的极限行为,得到了它在某种意义下以几何速率收敛的充分条件.得到此条件对现实生活中应用该模型、分析数据是有重要作用的.

收稿日期:2004－04－22

作者简介:肖新玲(1978－),女,山东菏泽人.

1　模型的引入

设(Ω, h, P_γ)是一个概率空间,B是R的Borel集构成的σ一代数.令$E=\{1,\cdots,e\}$是一个有限集合,F记E的所有子集构成的σ一代数.$\{Z_n, n\geqslant 0\}$表示一个定义在(Ω, h, P_r)上以(E, F)为状态空间的不可约、非周期的齐次马氏链,$\{\varepsilon_n(1)\},\cdots,\{\varepsilon_n\{e\}\}$是$e$个定义在$(\Omega, h, P_r)$上的$i\cdot i\cdot d$随机变量序列,其中每一个都定义在$(\Omega, h, P_r)$上且以$(E, F)$为状态空间.

定义1.1　称如下形式的模型

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \alpha X_n + (\beta(X_n)X_n+\delta)\varepsilon_{n+1}(Z_{n+1}) \\ &= T_1(X_n, \varepsilon_{n+1}(Z_{n+1})) \end{aligned} \tag{1}$$

(其中α, δ是实数)为随机环境下的AR(1)-ARCH(1)模型.

对于该模型作出$A1-A3$以及如下的假设:

A_1　$\{Z_n\},\{\varepsilon_n(1)\},\cdots,\{\varepsilon_n(e)\}$相互独立;

A_2　$\forall_i \in> E, n>0, Z_n, \varepsilon_n(i)$均与$\{X_s, s<n\}$独立;

A_3　$\forall_i \in E, E\varepsilon_n(i)=0, E|\varepsilon_n(i)|<\infty$.

$B1$ 可测函数 $\delta(x)$ 在有界集上有界；

$B2$ $\forall_x \in R^m$，都有 $\beta(x)x+\delta \neq 0$；

$B3$ $\delta(x)$ 可微.

定义 1.2 设模型(1)有唯一的不变概率分布 F，且对任何初始状态 $X_0=x$，由(1)迭代产生的 X_n 的概率分布记为 F_n^x. 如果存在常数 ρ：$0<\rho<1$，使得

$\lim\limits_{n\to\infty}\rho^{-n}\|F_n^x-F\|=0$，

则称模型(1)为伴随几何遍历的.

定义 1.3 在模型(1)中，$\{(X_n,Z_n)\}$ 称为该模型的导出序列.

2 若干结果

引理 3.1 在假设 $A1$、$A2$ 之下，(1)的导出序列 $\{(X_n,Z_n)\}$ 是一个齐次马氏链.

证明 $\forall\Lambda\in B$，$J\in E$，以及 x，$x_k(0\leqslant k\leqslant n)\in R$，$i$，$i_k(0\leqslant k\leqslant n)\in E$

$P_r(X_{n+1}\in\Lambda, Z_{n+1}=j|X_n=x, Z_n=i, X_k=x_k, Z_k=i_k, 0\leqslant k<n)$

$=P_r(aX_n+(\beta(X_n)X_n+\delta)\varepsilon_{n+1}(Z_{n+1})\in\Lambda, Z_{n+1}=j$

$|X_n=x, Z_n=i, X_k=x_k, Z_k=i_k, 0\leqslant k\leqslant n)$

$=P_r(aX_n+(\beta(X_n)X_n+\delta)\varepsilon_{n+1}(Z_{n+1})\in\Lambda, Z_{n+1}=j|Z_n=i)$

$=P_{ij}\cdot P_r(ax+(\beta(x)x+\delta)\varepsilon_{n+1}(j)\in\Lambda)$

$P_r(X_{n+1}\in\Lambda, Z_{n+1}=j|X_n=x, Z_n=i)$

$=P_r(aX_n+(\beta(X_n)X_n+\delta)\varepsilon_{n+1}(Z_{n+1})\in\Lambda, Z_{n+1}=j|Z_n=i$

$=P_{ij}\cdot P_r(ax+(\beta(x)x+\delta)\varepsilon_{n+1}(j)\in\Lambda)$

所以 $\{(X_n,Z_n)\}$ 是一个马氏链，再由 $\varepsilon_n(j)$ 是平稳的可知 $\{(X_n,Z_n)\}$ 是齐次的，故引理得证.

由于 $\{Z_n\}$ 是不可约的，从而易知对 (E,F) 上的任一测度 λ，$\{Z_n\}$ 是 λ—不可约的. 适当地选取一个测度，仍以 λ 记之，满足：$\forall i\in E$，$\lambda\{i\}>0$. 于是可以导出一个定义在 $(R\times E, B\times F)$ 上的 lebesgue 测度 $\mu\times\lambda$，这里 μ 为 (R,B) 上的 lebesgue 测度，使得 $\mu(\Lambda)>0$ 蕴含 $\mu\times\lambda(\Lambda\times\{i\})>0$，$\Lambda\in B$，$i\in E$.

引理 3.2 设模型(1)满足 $A1-A3$ 以及 $B1-B3$. 此外，$\forall i\in E$，$\{\varepsilon_n(i)\}$ 有下半连续的密度函数 $f_i(t)$，且 $f_i(t)>0$，$\mu-a.e.$ 则(1)的导出序列 $\{(X_n,Z_n)\}$ 是 $\mu\times\lambda$—不可约和非周期的，并且对 R 中任意具有正 μ—测度的有界集 B 以及 E 中任意子集 ε，$B\times\varepsilon$ 是 $\{(X_n,Z_n)\}$ 的小集.

证明 只需要验证[4]中引理 1.5.2 的条件(ⅰ)(ⅱ)(ⅲ).

条件(ⅰ)显然成立.

又 $\dfrac{\partial T_1(x,t)}{\partial x}=a+(\beta(x)x+\beta(x)t$

$\dfrac{\partial T_1(x,t)}{\partial x}=\beta(x)\cdot x+\delta$

均在 $R\times R$ 上连续，故条件(ⅱ)成立.

另外由假设 $B3$，$\forall x\in R$，$\left|\dfrac{\partial T_1(x,t)}{\partial x}\right|=|\beta(x)\cdot x+\delta|\neq 0$，故条件(ⅲ)成立.

由[4]中引理 1.5.2 即得该引理成立.

定理 3.1 设模型(1)满足 $A1-A3$，$B1-B3$ 以及引理 3.2 中的条件. 若还有

$|a|+\sup\limits_{x\in R, j\in E}|\beta(x)|E(|\varepsilon_n(i)|<1$，

则(1)的导出序列 $\{(X_n,Z_n)\}$ 是几何遍历的，从而(1)是伴随几何遍历的.

证明 令 $g(x,i)=1+|x|$，$\forall(x,j)\in R\times E$；显然 g 是 $R\times E$ 上的非负可测函数.

$E\{g(X_{n+1},Z_{n+1})|(X_n,Z_n)=(i,j)\}$

$=\sum\limits_{j\in E}P_{ij}\cdot E\{g(ax)+(\beta(x)\cdot x+\delta\}\varepsilon_{n+1}(j),j)\}$

$=\sum\limits_{j\in E}P_{ij}\cdot\{1+|ax+\beta(x)\cdot x+\delta\}\varepsilon_{n+1}(j)|\}$

$\leqslant\sum\limits_{j\in E}P_{ij}\{1+|a\|x|+|\beta(x)|E|\varepsilon_{n+1}(j)\|x|+|\delta|E|\varepsilon_{n+1}(j)|\}$

$\leqslant 1+|a\|+\sup\limits_{x\in R, j\in E}|\beta(x)|E|\varepsilon_{n+1}(j)\|x|+|\delta|E|\varepsilon_{n+1}(j)|\}$

$\leqslant rx+1+|\delta|E|\varepsilon_{n+1}(j)|$ (b)

其中 $r=|a|+\sup\limits_{x\in R, j\in E}|\beta(x)|E|\varepsilon_{n+1}(j)|<1$

设 $r<\rho<1$，取 $k=\dfrac{\rho-|\delta|E|\varepsilon_{n+1}(j)|}{\rho-r}$，

令 $B=\{(x,i)：x\leqslant k, i\in E\}$ $C_2=\rho|x|-r|x|+\rho-|\delta|E|\varepsilon_{n+1}(j)|$

则(b)式为

$E\{g(X_{n+1},Z_{n+1})\}|(X_n,Z_n)=(i,j)\}$

$\leqslant\rho(|x|+1)-(\rho|x|-r|x|+\rho-|\delta|E|\varepsilon_{n+1}(j)|)$

$=\rho g(x,i)-C_2$ 当 $(x,i)\notin B$ 时

又 $\sup\limits_{(x,i)\in B}E\{g(X_{n+1},Z_{n+1})\}|(X_n,Z_n)|=(x,i)\}$

$\sup\limits_{(x,i)\in B}\sum\limits_{j\in E}P_{ij}\{1+|a|x+\beta(x)\cdot x+\delta E|\varepsilon_{n+1}(j)|\}<\infty$

由[2]中定理 4.1.12，可得 $\{(X_n,Z_n)\}$ 是几何遍历的.

下证(1)是伴随几何遍历的.

由于$\{(X_n, Z_n)\}$具有几何遍历性，故由定义知：存在一个定义在$(R\times E, B\times F)$上的概率测度 π，以及常数 ρ：$0<\rho<1$，使得$\forall (x, i)\in R\times E$，

$$\lim_{n\to\infty}\rho^{-n}\| P^{(n)}((x,i),\cdot)-\pi(\cdot)\|=0. \quad (a1)$$

在(R, B)，上，定义集合函数 π^* 如下：

$\forall \Lambda\in B$, $\pi^*(\Lambda)=\pi(\Lambda\times E)$

显然，π^* 是(R, B)上的概率测度.

设 $x\in R$，$\{X_n\}$是以 $X_0=x$ 为初始值由(1)确定的迭代序列.于是$\forall \Lambda\in B$ 有 $P_r(X_n\in\Lambda | X_0=x)$

$$=\sum_{j\in E}\sum_{i\in E}P_r\{X_n\in\Lambda, Z_n=j | X_0=x, Z_0=i)$$
$$P(Z_0=i | X_0=x), \quad (a2)$$

且　$\pi^*(\Lambda)=\pi(\Lambda\times E)$

$$=\sum_{j\in E}\sum_{j\in E}\pi(\Lambda\times\{j\})P_r(Z_0=i | X_0=x). \quad (a3)$$

因 E 是一个有限集合，于是由$(a1)(a2)$和$(a3)$立即导出

$$\lim_{n\to\infty}\rho^{-n}\| P_r(X_n\in\Lambda | X_0=x)-\pi^*(\Lambda)\|=0. \quad (a4)$$

又由[1]中定理 1.4.1 的证明过程知：π 是$\{(X_n, Z_n)\}$的不变概率测度，从而由 π^* 的定义易知 π^* 是$\{X_n\}$的不变概率测度，且 π^* 的唯一性可由 π 的唯一性导出.于是由 π^* 具有的性质$(a4)$即可推知(1)是伴随几何遍历的，证明完毕.

参考文献：

[1] 盛昭瀚，王涛，刘德林.非线性时间序列模型的稳定性分析——遍历性理论与应用[M].北京：科学出版社，1993.

[2] 安鸿志，陈敏.非线性时间序列分析，上海科学技术出版社，1998.

[3]侯振挺，俞政.随机环境下的非线性时间序列分析－定义与遍历性.2003，(待发表)

[4] 俞政.马氏化方法在时间序列和排队模型中的应用：[博士学位论文].长沙：中南大学，2003.

[5] Daren B.H..Cline，Huay－min H.PU.A note on a simple Markov bilinear stochastic process.Statistics & Probability Letters，2002，56：283－288

The Limit Behavior of a AR(1)-ARCH(1) Model under the Random Environment

XIAO Xin-ling，YU Zheng

(School of Math.Sciences&computing Technology ，Changsha 410075，China)

Abstract：The idea of [3] is adopted in this dissertation. By applying the ergodicity theory of Markov chains on general state space，we discuss the limit behavior of the iterative sequence defined by a AR(1)－ARCH(1) model in random environment and obtain some sufficient conditions for their convergence . The AR(1)－ARCH(1) model in random environment studied by the author reflect the phenomenon that dynamic system is interfered by random environment，so it can better imitate many substantial problems in the real world.

Keywords：Markov chains；random environment；adjoint geometric ergodicity