文章编号:1005－0523(2004)05－0130－05

一类耦合工件组作业问题的多项式时间算法

徐平生

(华东交通大学,江西 南昌 330013)

摘要:耦合工件是指一个需经两次不同操作的工件,且这两次操作具有先后次序和一定的时间间隔.给定一组耦合工件,要求确定这些工件在一台机器上的加工顺序及时间安排,使加工全长达到最小,这就是耦合工件组作业问题.对一般情形,该问题已被证明为 NP 困难.本文讨论并给出了由 n 个相同的耦合工件构成的耦合工件组作业问题的多项式时间算法.

关 键 词:耦合工件;时间表;加工全长;多项式时间算法

中图分类号:O224　　**文献标识码**:B

1 引 言

耦合工件是指一个需经两次不同操作的工件,且这两次操作具有先后次序和一定的时间间隔.每个耦合工件 i,其指标参数可用符号(a_i, L_i, b_i)表示,其中 a_i 表示耦合工件 i 经第一操作所需时间,L_i 表示耦合工件 i 的两次操作的时间间隔,b_i 表示耦合工件 i 经第二操作所需时间.耦合工件的结构可用图 1 表示,需要特别说明的是,耦合工件 i 的第二次操作正好在第一次操作完成后 L_i 时间才开始,即 L_i 为分离第一操作和第二操作的时间,所以 L_i 也叫做耦合工件 i 的分离时间.

图 1　耦合工件的结构

n 个耦合工件称为耦合工件组.所谓单机耦合工件组作业问题,是指求耦合工件组在一台机器上加工的一个作业时间表,使得耦合工件组加工全长 $C_{\max}$(从第一个被加工工件开始加工时刻起,至全部工件加工完毕的时间跨度)最小.

耦合工件 j 如果在耦合工件 i 的两次操作之间进行加工,则耦合工件 i 和 j 叫做相互交织的工件,见图 2.

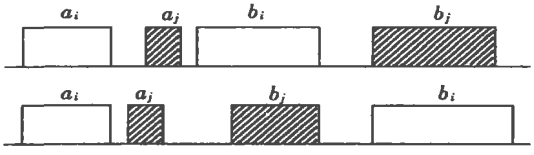

图 2　相互交织工件

从直观上看,为使 $C_{\max}$ 达到最小,关键在于将这些耦合工件适当地相互交织,使得空闲时间尽可能地小.

问题的研究起源于脉冲雷达系统(见[1]).为了跟踪某个目标,研究人员将发射一定时间长的电磁波,发射需花费时间为 a,电磁波遇到目标后将过一定时刻返回系统,雷达系统回收返回的电磁波需花费时间为 b.显然雷达系统在任一时刻只能做发射(或回收)电磁波一项工作,且这些操作具有耦合的特征.需要解决的问题是尽量减少雷达系统工作的空闲时间.因此,耦合工件组作业问题也称为雷达时间表问题.

收稿日期:2004－06－20

作者简介:徐平生(1964－),男,江西鄱阳人,华东交通大学副教授,在读工程硕士.

中国知网　https://www.cnki.net

根据时间表理论(见[2])，耦合工件组作业问题可采用下面的符号表述：

$$1|\ Coup-Task\ |\ C_{\max}$$

其中 *Coup* − *Task* 表示耦合工件(*Coupled* − *Task Job*)．

一般意义下的耦合工件组作业问题已被证明为 *NP* 困难(见[3])．Orman 和 Potts 在[4]中证明了 $1|\ Coup-Task,\ a_i=L_i=b_i\ |\ C_{\max}$，$1|\ Coup-Task,\ L_i=L,\ b_i=b\ |\ C_{\max}$，$1|\ Coup-Task,\ a_i=b_i=p\ |\ C_{\max}$ 都为 *NP* 困难问题．同时他们还指出 $1|\ Coup-Task,\ a_i=a,\ L_i=L,\ b_i=b\ |\ C_{\max}$ 是一个尚未解决的问题．本文讨论了这一特定限制下的耦合工件组作业问题，并给出该问题的一个多项式时间算法．

对于 $1|\ Coup-Task,\ a_i=a,\ L_i=L,\ b_i=b\ |\ C_{\max}$ 问题，由于参数 a、L、b 均为常数，所以该问题的作业时间表仅由各工件第一操作开始加工时间决定，而与耦合工件的加工顺序无关．故该问题的时间表 S 可描述为：

$$S=\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}.$$

其中 t_i 为耦合工件 i 的开始加工时间．

2　问题的多项式时间算法

定理 1　对于 $1|\ Coup-Task,\ a_i=a,\ L_i=L,\ b_i=b\ |\ C_{\max}$ 问题，如果 $L<\max(a,b)$，那么存在一个最优时间表 S^*，且有

$$C_{\max}[S^*]=n(a+L+b).$$

证明　由于 $L<\max(a,b)$，工件 i 的间隙时间 L 对任一工件 j 便构成了禁忌，即工件 j 的第一操作不能在工件 i 的两次操作之间的任一时刻开始加工；也就是说，耦合工件组的任意两个工件均不能构成相互交织的工件，于是问题的最优时间表 S^* 为：

$$S^*=\{0, a+L+b, 2(a+L+b), \cdots, (n-1)(a+L+b)\},$$

这时有，$C_{\max}[S^*]=n(a+L+b)$．

定理 2　对于 $1|\ Coup-Task,\ a_i=a,\ L_i=L,\ b_i=b\ |\ C_{\max}$ 问题，如果 $L\geq\max(a,b)$ 那么存在一个最优时间表 S^*，且有

$$C_{\max}[S^*]=np+(q+1)(l+L+b-p).$$

其中 $p=\max(a,b)$，$q=\lfloor n/(m+1)\rfloor$．

证明　(1)设 $a\geq b$，这时 $p=a$．令 $m=\lfloor L/p\rfloor$，$h=\min\{m, n-1\}$．

①若 $n\leq m+1$，则 $h=n-1$，$q=0$，显然我们可以假设第一个耦合工件在时刻 $t=0$ 开始加工，而其余的 $n-1$ 个工件均可嵌入区间[p, p+L]内完成第一个操作，且问题的最优时间表为 $S^*=\{0, p, \cdots, hp\}$，有

$$C_{max}[S^*]=na+L+b$$

若第 k 个工件不在 $(k-1)p$ 时刻开始加工，而在 $(k-1)p<t<kp$ 时刻开始加工，则由于[(k−1)p, t]太短而不能加工任意耦合工件，机器在区间[(k−1)p, t]空闲，对于此时的任一时间表 S，有

$$\begin{aligned}C_{max}[S]&\geq t+p+(n-k)p+L+b\\&>(k-1)p+p+(n-k)p+L+b\\&=na+L+b=C_{max}[S^*]\end{aligned}$$

即对任一时间表 S，有

$$C_{max}[S]\geq C_{max}[S^*],$$

②若 $n>m+1$，则 $h=m$，由 $q=\lfloor n/(m+1)\rfloor$，我们将 n 个耦合工件分成 $q+1$ 组，前 q 组包含 $m+1$ 个工件，最后一组包含 $n-q(m+1)$ 个工件，且每一组均由情形①存在一个最优子时间表．

由于前一组最优子时间表中机器空闲时间对后面的任意工件均构成了禁忌，故后一组工件必须在前一组工件最早结束时间后开始加工，于是上面得到的最优子时间表序列便构成了问题的最优时间表 S^* 为：

$$S^*=\{0, p, \cdots, hp, (h+1)p+L+b, (h+2)p+L+b, \cdots, (2h+1)p+L+b, \cdots, q[(h+1)p+L+b], \cdots, (n-1)p+q(L+b)\}.$$

有，$C_{max}[S^*]=na+(q+1)(L+b)$．

(2)根据对称性，可证得 $a<b$ 时亦存在问题的最优时间表 S^*，且有

$$C_{max}[S^*]=nb+(q+1)(L+a).$$

综合(1)、(2)，定理得证．#

由定理 1、定理 2 可得问题 $1|\ Coup-Task,\ a_i=a,\ L_i=L,\ b_i=b\ |\ C_{max}$ 的一个多项式时间算法，该算法的计算复杂性为 $O(n)$，具体步骤如下：

(1) 计算 $p=max(a,b)$．

(2) 若 $L<p$，则有 $S^*=\{0, a+L+b, 2(a+L+b), \cdots, (n-1)(a+L+b)\}$；否则，转下一步．

(3) 计算 $m=\lfloor L/p\rfloor$．

(4) 若 $n\leq m+1$，最优时间表为 $S^*=\{0, p, \cdots, (n-1)p\}$；否则，转步骤(5)．

(5) 计算 $q=\lfloor n/(m+1)\rfloor$，将 n 个工件分成 q

中国知网 https://www.cnki.net

+1 组,使前 q 组均包含 $m+1$ 个工件,这时最优时间表为:

$$S^{*}=\{0,p,\cdots,mp,(m+1)p+L+r,(m+2)p+L+r,\cdots,(2m+1)p+L+r,\cdots,q[(m+1)p+L+r],\cdots,(n-1)p+q(L+r)\}$$

其中 $r=\min\{a,b\}$.

本文讨论的尽管是一类具有特别限制的耦合工件组作业问题,但随着该问题的多项式时间算法的提出,一方面从理论上完善了 *Orman* 和 *Potts* 的研究结果,另一方面对寻求其它类别的耦合工件组作业问题的多项式时间算法或具有良好性能比的近似算法都是有帮助的.

参考文献:

[1] R·D·Shapiro, Scheduling coupled—tasks[J]· Naval Res· Logist· Quart, 1981, (28): 489～497.

[2] R·L·Grahar, E·L·Lawler, J·K·Lenstra, A·H·G·Rinnoy Kan, Optimization and Approximation in Deterministic Sequencing and Scheduling[J]· A Survey, Annals of Discrete Mathematics, 1979, (5): 287～326.

[3] W·Kern, W·M·Nawijn(1991), Scheduling Multi—Operations Jobs with Time Lags on a Single Machine, Preprint·

[4] A·J·Orman, C·N·Potts· On the Complexity of Coupled—Task Scheduling[J]· Discrete Applied Mathematics, 1997, (72): 141～154.

A Polynomial Time Algorithm of the Coupled—task Scheduling

XU Ping-sheng

(East china Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: A coupled—task is a job consisting of two distinct operations· These operations require to be processed in a predetermined order and at a specified interval apart· Given a group of coupled—task job, the coupled—task problem asks to find a processing sequence and a corresponding schedule on a single machine with the objective of minimizing the makespan· In general, this problem has been proved to be NP—hard· A polynomial time algorithm for the scheduling problem of identical coupled—task jobs is presented in this paper·

Key words: coupled—task job; scheduling; makespan; polynomial time algorithm

中国知网 https://www.cnki.net