

文章编号: 1005-0523(2004)05-0133-03

3-边连通图与 4-匹配

程 筠, 刘展鸿

(江西师范大学 数学与信息科学学院, 江西 南昌 330027)

摘要: 设 G 是阶为 n 的 3-边连通简单图, M_4 是 G 的一个 4-匹配, 设 $\Sigma(M_4)$ 表示和 M_4 关联的 8 个顶点的度数和, 本文证明了: 若对 G 的每个 4-匹配 M_4 有, $\Sigma(M_4) \geq 2n+3$, 则 G 是可折的或者 G 是 Petersen 图.

关 键 词: 3-边连通图; 4-匹配; 可折图; Petersen 图

中图分类号: 0157.5

文献标识码: A

0 引 言

本文所讨论的图均为无向、无环的图, 但允许有重边. 如无特别说明, 文中术语和符号参阅文献^[1]. 设 G 是图, $\lambda(G)$, $\delta(G)$ 分别表示图 G 的边连通度和最小度数. 特别地, 为了讨论的方便, 令 $\lambda(K_1) = \infty$.

设 G 是图, H 是 G 的连通子图, G/H 表示 G 收缩 H 所得到的图, 即在 G 中以一点 v_H 代替 H , 对 $\forall v \in V(G) - V(H)$, G/H 中连接 v 与 v_H 的边数等于 G 中连接 v 与 H 的边数.

设 $O(G)$ 表示图 G 的奇度点的集合. 图 G 称为可折的, 如果对任意 $X \subseteq V(G)$ 且 $|X|$ 是偶数, 总存在 G 的一个连通生成子图 G_X , 使得: $O(G_X) = X$. 特别地, K_1 是可折的, 称 K_1 是平凡的可折图. 由定义可知, 可折图必是 2-边连通的.

若 G 无非平凡的可折子图, 则称 G 是缩简的. 唯一的既是缩简图又是可折图的图是 K_1 . 而且, 缩简图的任意子图仍是缩简的.

引理 1^[2] 设 H 是 G 的可折子图, 则 G 是可折的 $\Leftrightarrow G/H$ 是可折的.

引理 2^[2] 若 $|E(G)| \geq 2|V(G)| - 3$, 则 G 是

缩简的 $\Leftrightarrow G = K_1$ 或 K_2 .

引理 3^[2] 若 G 是缩简的, 则 G 是简单图, G 不含三角形且 $\delta(G) \leq 3$.

引理 4^[2,3] K_n ($n \geq 3$), $K_{m,n}$ ($\min\{m, n\} \geq 3$) 是可折图.

引理 5^[4] 设 $E \subseteq E(G)$ 是使得 $G-E$ 的每个分支均为可折图的最小集, 设 G_1 是 G 收缩 $G-E$ 的每个分支到一个单点所得到的图, 则:

- 1) G_1 是缩简的, 称 G_1 是 G 的缩简图;
- 2) G 是缩简的 $\Leftrightarrow G = G_1$;
- 3) G 可折 $\Leftrightarrow G_1$ 可折;
- 4) $\lambda(G_1) \geq \lambda(G)$.

设 G_1 是 G 的缩简图, $d(v)$ 表示图 G 中点 V 的度数, $d_1(v)$ 表示图 G_1 中点 V 的度数. 由 k 条边组成的匹配 $M_k = \{u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_kv_k\}$ 称为 k -匹配. 对 G 的一个 k -匹配 M_k , 定义 $\Sigma(M_k) = \sum_{i=1}^k d(u_i) + d(v_i)$; 对 G_1 的一个 k -匹配 M_k , 定义 $\Sigma_1(M_k) = \sum_{i=1}^k d_1(u_i) + d_1(v_i)$.

由缩简图的定义可知, 若 G_1 是 G 的缩简图, M_k 是 G_1 的一个 k -匹配, 则相应地在 G 中也存在一个 k -匹配, 我们也称为 M_k .

收稿日期: 2004-05-20

作者简介: 程筠(1981-), 女, 江西星子人, 在读硕士研究生.

引理 6^[6] 设 G 是阶为 n ($n \leq 11$) 的 3-边连通简单图, 则 G 是可折的或 G 的缩简图是 Petersen 图.

引理 7^[5] 设 G 是阶为 n 的 3-边连通非平凡缩简图, $M(G)$ 表示 G 的极大匹配, 则 $|M(G)| \geq \frac{n+4}{3}$.

1 主要结论及证明

定理 1 设 G_1 是 G 的缩简图, 其中 $|V(G)| = n$, $|V(G_1)| = n_1$, 如果对 G 的每个 4-匹配 M_4 有,

$$\Sigma(M_4) \geq 2n+3,$$

则对 G_1 的每个 4-匹配 M_4 有,

$$\Sigma_1(M_4) \geq 2n_1+3.$$

证明 设 $M_4 = \{v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6, v_7v_8\}$ 是 G_1 的一个 4-匹配, 则 M_4 也可看成是 G 的一个 4-匹配. 设 $W \subseteq V(G) - V(M_4)$ 满足: W 中的点在收缩映射 $\theta: G \rightarrow G_1$ 下的像均在 $V(M_4)$ 中. 由 G_1 是 G 的缩简图, 可知 $G[\theta^{-1}(v_i)]$ 是 G 的可折子图, 从而 $G[\theta^{-1}(v_i)]$ 是连通的 ($1 \leq i \leq 8$). 因此 $G[\theta^{-1}(v_i)]$ 有生成树 T_i ($1 \leq i \leq 8$).

设 $E_1 = \bigcup_{i=1}^8 E(T_i)$, 则 $G[E_1]$ 是具有 8 个分支的森林, 而且这 8 个分支就是 $T_1, T_2, \dots, T_8$. 因此

$$|E_1| = \sum_{i=1}^8 |V(T_i)| - 8 = \sum_{i=1}^8 |V(G[\theta^{-1}(v_i)])| - 8$$

$$\text{由 } W \text{ 的定义可知, } |W| = \sum_{i=1}^8 |V(G[\theta^{-1}(v_i)])| - 8 \\ |E_1| = |W|$$

$$\therefore \Sigma_1(M_4) \geq \Sigma(M_4) - |E_1| \geq (2n+3) - |W| \geq 2(n-|W|)+3 \geq 2n_1+3.$$

定理 2 设 G 是阶为 n 的 3-边连通缩简图, 若对 G 的每个 4-匹配 M_4 有,

$$\Sigma(M_4) \geq 2n+3$$

则下列之一成立:

(1) G 可折 (即: $G = K_1$);

(2) G 是 Petersen 图.

证明 设 G 是满足定理条件的极小反例.

若对 G 的任意子图 H 有, $|E(H)| \geq 2|V(H)| - 3$,

由于 G 是缩简的, H 也是缩简的, 则由引理 2 可知, $H = K_1$ 或 K_2 .

因此对 G 的任意非平凡子图 H 有, 或 $|E(H)| \leq 2|V(H)| - 4$ 或 $H = K_2$. (1)

当 $|E(G)| \geq 2n-3$ 时, 由引理 2 知, $G = K_1$ 或 K_2 ;

若 $G = K_2$, 则 $\lambda(G) = \lambda(K_2) = 1 < 3$, 但 $\lambda(G) \geq 3$, 所以 $G \neq K_2$. $G = K_1$.

当 $|E(G)| \leq 2n-4$ 时, 设 M 是 G 的极大匹配,

情况 1 当 $|M| \geq 5$ 时,

设 $M_5 = \{u_1v_1, u_2v_2, u_3v_3, u_4v_4, u_5v_5\} \subseteq M$, 其中 $d(u_5) + d(v_5) \geq \max_{1 \leq i \leq 4} (d(u_i) + d(v_i))$;

设 $M_4 = M_5 - u_5v_5$,

$$\therefore \Sigma(M_5) \geq \frac{5}{4} \Sigma(M_4) \geq \frac{5}{4} (2n+3);$$

设 E' 表示端点均在 $\bigcup_{i=1}^5 \{u_i, v_i\}$ 中的边的集合, 由(1)可知,

$$|E'| \leq 2 \times 10 - 4 = 16.$$

$$\frac{5}{4} (2n+3) \leq \Sigma(M_5) \leq |E(G)| + |E'| \leq (2n-4) + 16 = 2n+12,$$

从而有: $n \leq 16$.

又 $M_5 \subseteq E(G)$, 所以 $n \geq 10$.

$$10 \leq n \leq 16.$$

1) 当 $10 \leq n \leq 11$ 时,

因为 G 是缩简的, 由引理 2 和引理 5 知, G 是简单图, G 的缩简图就是其本身, 即是 G . 又因为 $\lambda(G) \geq 3$ 和 $10 \leq n \leq 11$, 则由引理 6 知, 或 G 可折或 G 是 Petersen 图. 而唯一的既是缩简图又是可折图的图是 K_1 , $G = K_1$ 或 G 是 Petersen 图.

但 $|E(G)| \leq 2n-4$, 所以 $G \neq K_1$.

G 是 Petersen 图.

2) 当 $12 \leq n \leq 16$ 时,

由引理 7 知, $|M| \geq 6$;

所以, 在 G 中存在 6-匹配 $M_6 = \{u_1v_1, u_2v_2, u_3v_3, u_4v_4, u_5v_5, u_6v_6\} \subseteq M$,

其中, $d(u_6) + d(v_6) \geq d(u_5) + d(v_5) \geq \max_{1 \leq i \leq 4} (d(u_i) + d(v_i))$.

设 $M_4 = M_6 - \{u_5v_5, u_6v_6\}$

$$\therefore \Sigma(M_6) \geq \frac{6}{4} \Sigma(M_4) \geq \frac{3}{2} (2n+3).$$

设 E' 表示端点均在 $\bigcup_{i=1}^6 \{u_i, v_i\}$ 中的边的集合, 由(1)可知,

$$|E'| \leq 2 \times 12 - 4 = 20.$$

$$\frac{3}{2} (2n+3) \leq \Sigma(M_6) \leq |E(G)| + |E'| \leq 2n-4 + 20 = 2n+16. n \leq 11, \text{ 矛盾!}$$

情况 2 当 $|M|=4$ 时,
若 $n \geq 9$,则由引理 7 知, $|M| \geq 5$,这与 $|M|=4$ 矛盾! 因此 $n \leq 8$.

G 是缩简的, G 是简单图, G 的缩简图仍是 G .
由引理 6 和 $n \leq 8$ 知, G 是可折的, 即: $G=K_1$.
但 $|E(G)| \leq 2n-4$, 所以 $G \neq K_1$.

因此情况 2 不可能出现!
情况 3 当 $|M|=3$ 时,
设 $M=\{u_1v_1, u_2v_2, u_3v_3\}$, $X=\{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$, $Y=V(G)-X$,
1) 当 $Y=\Phi$ 时, $G=G[X]$, $|V(G)|=6$;
因为 $\lambda(G) \geq 3$, 所以 $\delta(G) \geq 3$, 从而有 $|E(G)| \geq \frac{3 \times 6}{2} = 9 = 2 \times 6 - 3$, 但这与 $|E(G)| \leq 2 \times 6 - 4$ 矛盾! $Y \neq \Phi$

2) 当 $Y \neq \Phi$ 时,
由 M 的极大性知, $E(G[Y]) = \Phi$.
 $\lambda(G) \geq 3$, $\delta(G) \geq 3$, 从而有 $\forall y \in Y, d(y) \geq 3$.
因为 G 是缩简的, 所以 G 中不含三角形且 G 是简单图. 又因为 $E(G[Y]) = \Phi$,
所以, 对 $\forall y \in Y, N(y)$ 只能是 $\{v_1, v_2, v_3\}, \{u_1, v_2, v_3\}, \{u_1, v_2, u_3\}, \{v_1, u_2, u_3\}, \{v_1, u_2, v_3\}, \{v_1, v_2, u_3\}, \{u_1, u_2, u_3\}, \{u_1, u_2, v_3\}$ 中的一个.

即: 对 $\forall y \in Y$ 有, $d(y)=3$.
不失一般性, 设 $y_1 \in Y, N(y_1)=\{v_1, v_2, v_3\}$, 则 $N(u_1) \cap Y = \Phi$, 否则 G 中存在 4-匹配; 同理, $N(u_2) \cap Y = \Phi, N(u_3) \cap Y = \Phi$.

又 $\because$ 对 $\forall y \in Y, d(y)=3$ 且 $E(G[Y]) = \Phi$,
 $\therefore$ 对 $\forall y \in Y, N(y)=\{v_1, v_2, v_3\}$.
如果 $|Y| \geq 3$, 则 $G[Y \cup \{v_1, v_2, v_3\}]$ 中必含有 $K_{3,3}$. 由引理 4 知, $K_{3,3}$ 是可折图. 但 G 是缩简的, 从而 G 中不含非平凡的可折子图, 矛盾! $|Y| \leq 2$.

这样, $n = |Y| + 6 \leq 8 < 11$.
又因为 G 是简单图, G 的缩简图仍是 G , 则由引理 6 知, G 可折, 即 $G=K_1$.
但 $|E(G)| \leq 2n-4$, 所以 $G \neq K_1$. 情况 3 不可能出现!

情况 4 当 $|M|=2$ 时,
设 $M=\{uw, wx\}$, $X=\{u, v, w, x\}$, $Y=V(G)-X$
1) 当 $Y=\Phi$ 时, $G=G[X]$, $|V(G)|=4$;

又因为 G 是简单图且 G 中不含三角形, 所以 $\delta(G) \leq 2$, 这与 $\delta(G) \geq 3$ 矛盾!

2) 当 $Y \neq \Phi$ 时,
因为 M 是极大匹配, 所以 $E(G[Y]) = \Phi$.
又 G 中无三角形且 G 是简单图, 所以对 $\forall y \in Y$ 有, $d(y) \leq 2$, 这与 $\delta(G) \geq 3$ 矛盾! 情况 4 不可能出现!

情况 5 当 $|M|=1$ 时,
因为 G 中无三角形且 G 是简单图, 所以 $G=K_{1, n-1}$, 这与 $\lambda(G) \geq 3$ 矛盾! 情况 5 不可能出现!
综上所述定理成立, 即或 $G_1=K_1$ 或 G 是 Petersen 图.

定理 3 设 G 是阶为 n 的 3-边连通简单图, 若对 G 的每个 4-匹配 M_4 , 有:
 $\Sigma(M_4) \geq 2n+3$

则下述之一成立:
1) G 可折;
2) G 是 Petersen 图.

推论 设 G 是 3-边连通简单图, 若对 $\forall uv \in E(G)$ 有, $d(u) + d(v) \geq \frac{2n+3}{4}$, 则或者 G 是可折的或者 G 是 Petersen 图.

证明 对 $\forall uv \in E(G)$ 有, $d(u) + d(v) \geq (2n+3)/4$. 因此对 G 中的每个 4-匹配 M_4 , 有 $\Sigma(M_4) \geq 2n+3$. 由定理 3 知, 或者 G 是可折的或者 G 是 Petersen 图.

参考文献:
[1] J. A. Bondy, U. S. R. Murty. Graph Theory with Applications [M]. MacMillan, London and Elsevier, Amsterdam, 1976.
[2] P. A. Catlin. A reduction method to find spanning eulerian subgraphs[J]. J. Graph. Theory 1988(12): 29—44.
[3] P. A. Catlin. supereulerian graphs, collapsible graphs and 4-cycles, Congres. Numer. (1987(56): 223—246.
[4] P. A. Catlin. spanning eulerian subgraphs and matchings, Discrete[J]. Math 1989(76): 95—116.
[5] Z.-H. Chen, H.-J. Lai. Collapsible graphs and matchings[J]. J. Graph. Theory 1993(17): 597—605
[6] Z.-H. Chen. Supereulerian graphs and the Petersen graph, J. combinat[J]. Math. and Combinat. Comput. 1991(9): 79—89.

(下转第 153 页)

Refinement and Extension about the Leibnize Inequality

LIU Jian¹, CHU Xiao-guang²

(1·East China Jiaotong University, Nanchang 330013; 2· Ningbo Chuangyuan Clothing Development Limited Company, Ningbo 315500, China·)

Abstract:Refining the famous Leibniz Inequality and extending it to be a geometric inequality chains, four conjectures concerned are put forward and verified by the computer.
Key words: triangle; inequality; point

(上接第 135 页)

3-edge-connected Graphs and 4-matchings

CHENG Yun, LIU Zhan-hong

(Insitute of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang 330027, China)

Abstract:Let G be a 3-edge-connected simple graph of order n . For a 4-matching M_4 of G , let $\Sigma(M_4)$ denote the sum of the degrees of the eight vertices incident with M_4 . We show that if $\Sigma(M_4) \geq 2n+3$ for all 4-matchings M_4 of G , then either G is collapsible, or G is the Petersen graph.
Key words: 3-edge-connected graphs; 4-matchings; collapsible graphs; the Petersen graph