文章编号：1005－0523(2004)05－0136－02

k部图的符号控制数的一个下界

罗端高，王家宝

（中南大学 数学学院，湖南 长沙 410075）

摘要：研究图的符号控制数，得到了n阶k部图的符号控制数的一个下界，当$\delta=2$时这个界是精确的，并且给出了$\delta=2$时一个达到下界的图例．王春香等得到的结果（引言中的定理B）是本文结果当$\delta=2$且$k=2$时的一个特例．

关　键　词：k部图；符号控制函数；符号控制数

中图分类号：157.5　　　　**文献标识码：**A

0　引　言

设图$G=(V,E)$，V和E分别表示图G的顶点集和边集，δ为G的最小度．若$v\in V$，则$N(v)=\{u\in V\mid uv\in E\}$表示$v$点的开邻域，$N[v]=N(v)\cup\{v\}$表示$v$点的闭邻域．对函数$f:V\to\{-1,1\}$，令$f$的权为$\omega(f)=\sum^{v\in V}f(v)$．对$V$中的点$v$，定义$f[v]=\sum f(u)$；对于$s\subseteq V$，记$f(s)=\sum f(v)\ v\in s$图$G$的符号控制函数是函数$f:V\to\{-1,1\}$，使得对任意的$v\in V$，$f[v]\geq 1$．$G$的符号控制数定义为为$\gamma_s(G)=min\{\omega(f)\mid f$为$G$的符号控制函数$\}$．权为$\gamma_s(G)$的符号控制函数称为$G$的一个$\gamma_s$函数．凡文中未提及的术语见[1]．

关于控制函数研究，是现代图论当中的一个相当活跃的课题．已经证明，确定图的符号控制数是NP－完全问题，因而对于控制数大多集中研究一般图或特殊图类的界．本文考虑n阶k部图的下界．

对于一般图，在[2]中，张忠辅等得出了下面的定理．

定理A　对于任意一个具有n个顶点的图G，有$\gamma_s(G)\geq 2\lceil(-1+\sqrt{1+8n})/2\rceil-n$，这个结果是精确的．

对于偶图，Dunbar等在[3]中曾经提出了如下的猜想：$\gamma^-\geq 4(\sqrt{1+n}-1)-n$．王春香，毛经中在[4]中证明这个猜想是正确的，并得出如下定理

定理B　设G是具有n个顶点的偶图，则$\gamma_s(G)\geq 4(-1+\sqrt{1+n})-n$．

1　主要结果及证明

设在无向简单图$G(V,E)$中，$A,B\subseteq V(G)$，$A\cap B=\Phi$，令$E(A,B)=\{uv\mid uv\in E(G),u\in A,v\in B\}$，$e(A,B)=|E(A,B)|$．

设f是n阶图$G(V,E)$的一个符号控制函数，记$P=\{v\in V\mid f(v)=1\}$，$M=\{v\in V\mid f(v)=-1\}$，$p=|P|$，$m=|M|$．

定理1　设$G=(V_1,V_2,\cdots,V_k;E)$是一个最小度$\delta\geq 2$的n阶k部图，$K=k/(k-1)$，$d=\delta+2$，则

$$\gamma_s(G)\geqslant K(-d+\sqrt{d^2+8dn/K})/2-n$$

证明　设f是n阶图$G=(V_1,V_2,\cdots,V_k;E)$的一个符号控制函数，P,M,p,m定义如上．令$P_i=p\cap V_i$，$M_i=M\cap V_i$，$p_i=|P_i|$，$m_i=|M_i|$，$i=1,2,\cdots,k$．则$n=\sum_{i=1}^{k}p_i+\sum_{i=1}^{k}m_i$．对于$n$阶图$G(V,E)$，尹传勇

收稿日期：2004－05－20

作者简介：罗端高(1980－)，男，湖南衡山人，硕士研究生．

等在[5]中证明了

$$e(P,M)=e(\bigcup_{i=1}^{k}P_i,\bigcup_{i=1}^{k}M_i)$$

$$\geq(\delta/2+1)(n-p) \quad (1)$$

对于每一个 $v\in P_i$，有 $|N(v)\cap(\bigcup_{i=1}^{k}M_i)|\leq|N(v)\cap(\bigcup_{i=1}^{k}P_i)|$，因此

$$e(P,M)\leq(k-1)p^2/k \quad (2)$$

由(1)和(2)可得

$(\delta/2+1)(n-p)\leq p^2(k-1)/k$ 即 $p^2(k-1)/k+(\delta/2+1)p-(\delta/2+1)n\geq 0$

由 p 的非负性，可解得，

$$p\geq K(-d+\sqrt{d^2+8dn/K})/4$$

因此 $\gamma_s(G)=2p-n$

$$\geq K(-d+\sqrt{d^2+8dn/K})/2-n$$

不难看出，当 $\delta=2$ 时，

$$\gamma_s(G)\geq\frac{2k}{k-1}[-1+\sqrt{1+\frac{2(k-1)}{k}n}]-n$$

这个下界是精确的．事实上我们可以构造 k 部图 G，它的符号控制函数的权恰好等于 $(2k/(k-1)(-1+\sqrt{1+2(k-1)n/k}-n)$

设 H 是 $K_{2,2(k-1)}$．$H_1,H_2,\cdots,H_k$ 是 k 个 H 的拷贝，令 X_i,Y_i 分别表示 H_i 中的 2 度顶点集和 $2(k-1)$ 度顶点集，$i=1,2,\cdots,k$．

G 是连接 $\bigcup_{i=1}^{k}H_i$ 中与 Y_i 与 $Y_j(j\neq i,\ i=1,2,\cdots,k)$ 的每一对顶点得到的图．把 $X_1\cup Y_2,X_2\cup Y_3,\cdots,X_{k-1}\cup Y_k,X_k\cup Y_1$ 看成 G 的 k 个部，则 G 是阶为 $n=2k+2k(k-1)$ 的 k 部图．构造 G 的控制函数 f 如下：给 $\bigcup_{i=1}^{k}Y_i$ 中的顶点赋值 1，给 $\bigcup_{i=1}^{k}X_i$ 中的顶点赋值 -1，易知对于任意的 $v\in V(G)$，有 $f[v]\geq 1$，因此 f 是 G 的控制函数，此时 $f(V)=2k-2k(k-1)=\frac{2k}{k-1}[-1+\sqrt{1+\frac{2(k-1)}{k}n}]-n$，其中 $n=2k+2k(k-1)$，所以 f 为一个 γ_s 函数．即当 $\delta=2$ 时，这个界是可达的．

当 $\delta=2$，$k=2$ 时，得到 $\gamma_s(G)\geq 4(-1+\sqrt{1+n})-n$，这就定理B．

在图 G 中，用 $d_G(v)$ 表示 v 点在 G 中的度，令 $I(G)=\{v\in V|d_G(v)=0\}$，$\Omega(G)=\{v\in V|d_G(v)=1\}$，$P(G)=v\in V|N(v)\cap\Omega(G)\neq\Phi\}$．我们称 $V(G)-(I(G)\cup\Omega(G)\cup P(G))$ 为图的符号点集，记作 $S(G)$．

引理[5]　若 $S(G)=\Phi$，则 $\gamma_s(G)=|V(G)|$．

下面不妨假定 $S(G)\neq\Phi$，记 $\delta^*=\min\{d_G(v)|v\in S(G)\}$，易知 $\delta^*(G)\geq\delta(G)$ 且 $\delta^*(G)\geq 2$，利用[5]中的结果，易得到 $e(P,M)\geq(\delta^*/2+1)(n-p)$，在定理 1 的证明过程中引入 $\delta^*(G)$ 可以得到

定理 2　设 $G=(V_1,V_2,\cdots,V_k;E)$ 是一个 N 阶 k 部图，当 $S(G)\neq\Phi$，$\delta^*=\delta^*(G)$，则

$$\gamma_s(G)\geq\frac{k}{2(k-1)}[-(\delta^*+2)+\sqrt{(\delta^*+2)^2+8\frac{k-1}{k}(\delta^*+2)n}]-n.$$

参考文献：

[1] J.A.Bondy，U.S.R.Murty. Graph Theory with Application [M]. Amsterdam: North Holland, 1976.

[2] Zhang zhongfu et al.. A note on the lower bounds of signed domination number of a graph [J]. Discrete Mathematics, 195 (1999) 295－298

[3] J.Dunbar, S.Hedetniemi. M.A.Henning, Minus domination in graphs [J]. Discrete Mathematics, 199(1999) 35－47.

[4] Wang Chunxiang, Mao Jingzhong. A proof of a conjecture of minus domination in graphs [J]. Discrete Mathematics, 256 (2002) 519－521.

[5] 尹传勇，毛经中，韩娅玲，关于图的符号控制数的下界 [J]. 数学杂志.

A Lower Bound of Signed Domination Number of Partite Graph

LUO Duan-gao, WANG Jia-bao

(School of Mathematics, Central South University, Chang sha 410075, China)

Abstract: In this paper, we study the signed domination number of graphs and obtain a lower bound for a k-partite graph. This bound is sharp when $\delta=2$. As a sample, we construct a graph with $\delta=2$, which reaches the above lower bound. Wang Chunxiang's result $\gamma_s(G)\geq 4(-1+\sqrt{1+n})-n$ is a special case of our results in $\delta=2$ and $k=2$.

Key words: k-partite graph; the signed domination function; the signed domination number