

文章编号: 1005—0523(2004)05—0138—05

大型群组决策的正态均值法

傅丽仙

(华东交通大学 基础科学学院, 江西 南昌 330013)

摘要: 针对大型群组, 定义了专家的决策坐标以及客观上真实反映评价值的理想坐标. 给出一个公理性假设, 指出大型群组中专家们的决策(坐标)作为随机变量满足正态分布时, 群组的决策才是有效的决策, 从而给出群决策的正态均值法.

关 键 词: 群决策, 决策坐标, 理想决策, 理想坐标, 正态分布, χ^2 检验法

中图分类号: C934

文献标识码: A

0 引 言

群决策至今仍是决策理论研究的热点. 目前为止群决策还没有一个被广泛接受的定义. 我们认为, 群决策是研究多人如何做出统一的有效抉择的方法和理论. 群决策理论是建立在个体决策理论基础之上的, 因此群决策质量受个体决策质量的影响, 而个体决策的决策水平取决于该个体的专业水平、经验、知识面、综合能力并与决策时的精神状态、情绪和偏好等密切相关, 这些因素都是随机因素(譬如人的知识面, 对具体的个体来讲, 它的获得受诸多随机因素的影响, 因而它本身就是随机的), 以往的学者都是把研究的注意力集中在这些因素的差异上, 例如用“权”区分专家的水平差异^{[1][2][3][4]}等, 追求集结规则与过程本身公平合理, 对于小型群组(组成决策群体的人数较少, 比如小于 10 人)有其合理性, 但对于大型群体(组成决策群体的人数较多, 比如不小于 50 人), “权”的方法会增大模型误差, 因为“权”本身具有主观性. 既然个体决策者受很多随机因素的影响, 因此大型群组的决策结果应体现出某种概率分布规律. 有的学者虽然已经注意到群决策过程中某些随机因素的影响,

但没有就群组的决策结果应体现出的概率分布规律进行讨论^{[5][6]}. 还有的学者侧重于这些随机因素中的某一个因素对决策结果影响的讨论, 比如文^[7]对于决策者的决策能力满足一定的概率分布时的一些决策规则进行了研究. 到目前为止, 笔者还没有发现有哪位学者把群决策中受诸多随机因素影响的个体决策结果作为一个随机变量研究, 从而给出其概率分布. 显然, 只有大型群组的情况下, 才适合把个体决策结果作为随机变量进行研究, 才有可能找到它服从的分布规律. 实践中, 有时候大型群组决策是必要的. 比如对于那些客观上存在唯一的真实值(这个真实值本文定义为理想决策, 见定义 6)决策的决策, 为了克服个体主观因素的影响, 专家的人数应越多越好, 即这类决策适合采用大型群组方式决策. 本决策结文在假定专家们同专业水平(指专业水平差异不显著)且彼此独立(果互不影响)的情况下, 指出大型群组中的决策(坐标)作为随机变量满足正态分布时, 群组的决策才是有效的决策, 从而给出群决策的正态均值法.

1 决策坐标与正态分布

由 $S_1, S_2, \dots, S_m$ 共 $m(m \geq 50)$ 个同水平的专家

收稿日期: 2004—05—20

作者简介: 傅丽仙(1972—), 女, 福建仙游人, 讲师.

中国知网 <https://www.cnki.net>

组成的大型群组决策系统 G , 评价 n 个对象 $B_1, B_2 \dots B_n$, 给出这 n 个对象的相对重要性. 设 S_i 对第 j 个被评目标 B_j 的评分值记为 $x_{ij} \in [0, 1] (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n \text{ 且 } I>0)$, 则 S_i 的决策向量为 $x_i = (x_{i1}, x_{i2} \dots x_{in})^T \in E^n$, x_{ij} 的值越大, 目标 B_j 的值最优. S_i 的决策向量 x_i 既有大小, 又有方向. x_i 的大小 $\|x_i\|$ 反映了第 i 个专家对 $B_1, B_2 \dots B_n$ 整体印象的好坏, 在方向一致的情况下, 不同的专家打分也可能不同, 有的专家可能会整体偏高, 有的专家可能会整体偏低, 但对应分量成比例. 在群决策中, 我们关心的是 n 个被评价对象 $B_1, B_2 \dots B_n$ 的相对重要性, 而这种相对重要性的信息是由决策向量的方向表达出来的, 与该向量的大小无关, 因此, 制定集结规则时, 必须剔除各决策向量的大小(专家对 $B_1, B_2 \dots B_n$ 整体印象的好坏)对群决策结果影响.

定义 1 称 $\epsilon_1=(1, 0 \dots 0)^T, \epsilon_2=(0, 1 \dots 0)^T \dots \epsilon_n=(0, 0 \dots 1)^T$ 为 n 维空间的一个标准正交基.

定义 2 令 $\alpha=(x_1, x_2 \dots x_n)^T$, 称 $\theta_i=\arccos \frac{\alpha \cdot \epsilon_i}{\|\alpha\| \cdot \|\epsilon_i\|} (i=1, 2 \dots n)$ 为向量 α 到第 i 个基向量 ϵ_i 的角.

显然, $0 \leq \theta_i \leq \pi$. 若 α 是专家决策向量(它的每个分量都大于零), 则 $0 < \theta_i < \frac{\pi}{2}$.

定义 3 若 $\alpha, \beta (\alpha \neq 0, \beta \neq 0)$ 在从 $o=(0, 0 \dots 0)^T$ 点出发的同一条射线上, 我们称 α, β 具有关系 R .

定理 1 定义 3 所定义的关系 R 是一个等价关系^[1].

证明 显然关系 R 满足反身性、对称性、传递性, 即 R 是一个等价关系.

令 $T=\{x|x>0, x \in R^n\}$ 是一切可能的决策向量构成的集合, 不妨称之为决策可能集. 再令 $\bar{T}=\{\bar{x}|x>0, x \in R^n\}$, $\bar{x}$ 表示 x 的等价类, 即为与 x 等价的全体向量构成的集合, 则 $\bar{x}$ 在几何上表示从 $o=(0, 0 \dots 0)^T$ 出发, 通过 x 的超射线.

引理 1 对于 $(\theta_1, \theta_2 \dots \theta_n)^T \in R^n, \theta_i \in [0, \frac{\pi}{2}], i=1, 2 \dots n$, 若满足

$$\sum_{i=1}^n \cos^2 \theta_i = 1$$

则存在 $x_0 \in T$, 使 x_0 分别到第 i 个基向量 ϵ_i 的角为 $\theta_i, i=1, 2 \dots n$.

证明 令 $x_0=(\cos \theta_1, \cos \theta_2, \dots, \cos \theta_n)^T$, 显然 $x_0 \in T$. 又由几何知识知 x_0 分别与第 i 个基向量 ϵ_i 的

交角为 $\theta_i, i=1, 2 \dots n$.

令 $E=\left\{(\theta_1, \theta_2 \dots \theta_{n-1})^T | \theta_i \in [0, \frac{\pi}{2}]\right\}$ 为 $n-1$ 维的开区间, 则

定理 2 任意 $x \in T$, 设 $\theta_1, \theta_2 \dots \theta_n$ 分别为 x 到第 i 个基向量 ϵ_i 的角, $i=1, 2 \dots n$, 令 $f(\bar{x})=(\theta_1, \theta_2 \dots \theta_{n-1})^T$ 则 f 为 $\bar{T}$ 到 E 的一一对应.

证明 若 $x_1 \in T, x_2 \in T$ 且 $x_1 \neq x_2$, 由 n 维向量空间的有关知识易知

$$f(\bar{x}_1) \neq f(\bar{x}_2)$$

即 f 为单射.

任意 $(\theta_1, \theta_2 \dots \theta_{n-1})^t \in E$, 令

$$\theta_n = \arccos \sqrt{1 - \cos^2 \theta_1 - \cos^2 \theta_2 \dots - \cos^2 \theta_{n-1}}$$

显然 $\theta_n \in [0, \frac{\pi}{2}], i=1, 2 \dots n$, 由引理 1 存在 $x_0 \in T$, 使 x_0 分别到第 i 个基向量 ϵ_i 的角为 $\theta_i, i=1, 2 \dots n$, 此时

$$f(\bar{x}_0) = (\theta_1, \theta_2 \dots \theta_{n-1})^T \text{ 且 } \bar{x}_0 \in \bar{T}$$

即 f 为满射.

所以 f 为 $\bar{T}$ 到 E 的一一对应^[8].

定义 4 任意 $x \in T$, 设 $\theta_1, \theta_2 \dots \theta_n$ 分别为 x 到第 i 个基向量 ϵ_i 的角, $i=1, 2 \dots n$, $\bar{x}$ 表示 x 的等价类, 则 $(\theta_1, \theta_2 \dots \theta_{n-1})^T$ 称为射线 $\bar{x}$ 的角坐标.

鉴于专家对 n 个对象 $B_1, B_2 \dots B_n$ 的相对重要性的评价只与决策向量的方向有关, 而与向量的大小无关, 因此, 对于两个专家的决策向量分别为 $x_i, x_j, x_i \neq x_j, \bar{x}_i \neq \bar{x}_j$, 则认为两个专家做出的是相同的决策, 几何上表现为 x_i, x_j 在同一条超射线上, 二者的等价类有相同的角坐标. 因此, 决策向量只因其等价类的角坐标的不同而加以区分.

定义 5 设某专家做出的决策为 $x(>0)$, 则的等价类的角坐标称为该专家的决策坐标.

定义 6 客观上唯一存在的真实反映 n 个对象 $B_1, B_2 \dots B_n$ 的相对重要性的正向量(各分量大于零, 其模不妨取为 1)称为理想决策(值), 其等价类的角坐标称为理想坐标.

由以上讨论知, 决策坐标和理想坐标都是 $n-1$ 维的正向量, 且当 $n=2$ 时, 专家的决策坐标即为平面直角坐标系内该专家决策向量所在射线与 x 轴的夹角(锐角), 且夹角唯一确定一条从原点出发的射线, 这就是决策坐标的几何意义.

考察由 $S_1, S_2 \dots S_m$ 同水平的 m 个专家组成的决策系统 G , 注意“同水平”仅是一定意义上的界定, 专家的决策水平还取决于其个体的专业水平、经

验、知识面、综合能力以及决策时的精神状态、情绪和偏好等密切相关,但这些都是次要因素,并且每个因素都不起突出作用.在无外界干扰的正常情况下,由中心极限定理^[9]知,每个专家的决策坐标应围绕理想坐标波动,服从正态分布.其实 G 可以看成是某中学的一个班级,专家们可看成是学生,“同水平专家”相当于同知识水平学生(如初三年级),一个决策过程相当于一次考试过程,一个特定的决策问题相当于一张特定的考卷,一个具体的专家的决策结果相当于一个具体学生的成绩.对于该班学生考试来讲,虽然学生总体知识水平相同,都是初三年级水平,但个体水平还是具有微观差异的,而且成绩还受个体的经验、知识面、综合能力、精神状态、心理、情绪等诸多随机因素的影响,但每个因素都不起突出作用,因此,由中心极限定理,学生的考试大致服从正态分布,从而专家的决策坐标也服从正态分布.否则是不正常的,如存在某种形式的集体作弊(老师故意出一些课堂上讲过的题,漏题,监考不严等),学生考试中这种“外因”的干扰恰相当于群决策中群体思维^{[11][12]}的存在,它的存在使专家无法独立地进行决策.

现从另外一个角度分析 G 中专家们所做出的决策(坐标)应服从正态分布. G 中专家们受到“专业水平”的约束使他们的决策坐标围绕理想坐标波动,意味着均值一定,对特定的 G 来讲,专家们的整体决策水平意味着方差 σ^2 一定.在没有其它“外力”的显著作用下,专家们的决策(坐标)应在满足上述两个条件下力求达到最大的“自由度”与“无序”,即熵最大.由极大熵准则^[10],这些决策结果(坐标)应服从正态分布.如不服从正态分布,说明决策结果受“外力”干扰显著,这个干扰可能为某种形式的群体思维(专家彼此不独立),也可能是由于专家水平存在显著差异等.

综上所述,给出以下公理性假设.

公理性假设 由 $S_1, S_2, \dots, S_m$ 同水平的 m ($m \geq 50$) 个专家组成的决策系统 G 中,设各专家彼此独立,各专家的专业水平的微观差异、经验、知识面、综合能力以及决策时的偏好、精神状态、情绪等都是影响决策结果的随机因素,并且每个因素都不起突出作用,因而,专家们所做出的决策(坐标)应服从正态分布.

定义 7 由 $S_1, S_2, \dots, S_m$ m 个专家组成的决策系统 G 中,若专家们所做出的决策结果(坐标)服从正态分布,则称该决策为有效决策.否则,称该决策为

无效决策.

现实中导致无效决策的情况一般有如下两点(注意定义 7 中对专家已无“同水平”的要求):

1) 专家水平差异过于显著,不来自“同水平”的人群.

2) 受其它外来因素比如群体思维的显著影响,导致分布对称性的改变.

2 群决策的正态均值法

设 G 中 m 个专家的决策坐标分别为 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$, n 是被评目标的个数,当 $n=2$ 时, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ 为一维点构成的数据组,则可直接用 χ^2 检验法^[4]进行检验是否服从正态分布;当 $n \geq 3$ 时,就没有 $n=2$ 时那么简单了,我们只有一个如下不太完善的办法.

引理 2^[6] 多维正态分布的边缘分布为正态分布.

引理 2 的等价说法为:对于某一多维分布,若存在它的一个边缘分布不是正态分布,则该多维分布不是正态分布.

由引理 2, 对于 $\theta_1 = (\theta_1^1, \theta_1^2, \dots, \theta_1^{n-1})^T$, $\theta_2 = (\theta_2^1, \theta_2^2, \dots, \theta_2^{n-1})^T, \dots, \theta_m = (\theta_m^1, \theta_m^2, \dots, \theta_m^{n-1})^T$, 则可用 χ^2 检验法依次检验如下 m 组数据是否服从正态分布:

(1) $\theta_1^1, \theta_2^1, \dots, \theta_m^1$, 即 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ 的第一个分量依次排列构成的 m 个一维数据,下类推.

(2) $\theta_1^2, \theta_2^2, \dots, \theta_m^2$

.....

(m) $\theta_1^{n-1}, \theta_2^{n-1}, \dots, \theta_m^{n-1}$

若已检出一组数据不是来自正态总体,则停止检验,由引理 2 及定义 7 专家们的决策为无效决策.否则,该检验方法不能判断专家们所做出的决策结果(坐标)是否服从正态分布,应做出专家们的群体决策结果是有效的判断,即认为专家们的决策是有效决策.当然,这可能是犯错误的,因为存在所有边缘分布为正态分布,但联合分布不是正态分布的情况^[13].但目前的技术水平只能做到这一点,如何给出完美的随机向量服从多维正态分布的检验方法有待研究.

设专家们的决策是有效决策,即他们的决策坐标 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ 来自多维($n-1$ 维)正态总体,令

$$\bar{\theta} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i = \frac{1}{m} \left[\sum_{i=1}^m \theta_i^1, \sum_{i=1}^m \theta_i^2, \dots, \sum_{i=1}^m \theta_i^{n-1} \right]$$

作为理想坐标的估计. 易知 $\bar{\theta}$ 其实是由 $\theta_1, \theta_2 \dots \theta_m$ 的各边缘分布的相应均值的无偏估计构成的 $n-1$ 维向量. 由定理 2 $\bar{\theta}$ 所对应的向量(不妨取模为 1)为:

$$x = [\cos \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i, \cos \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_2 \dots \cos \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_{n-1}, x_n]$$

(1)

其中 $x_n = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_1 - \cos^2 \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_2 - \dots - \cos^2 \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_{n-1}}$

显然 x 是一个单位向量.
通过以上分析, 若决策结果(坐标)服从正态分布, 则各决策坐标的样本均值 $\bar{\theta}$ 可作为理想坐标的无偏估计, $\bar{\theta}$ 依定理 2 所对应的向量 x (模为 1)是理想向量的近似, 可作为最终决策向量. 该方法我们称之为群决策的正态均值法.

对于大型群组, 当已检验出专家们的决策结果不服从正态分布, 从而无效决策时, 不能直接应用正态均值法. 现实中, 可集体开会分析导致决策无效的原因, 比如是否是因为水平差异太显著, 还是因为群体思维的影响. 如果初步认为是水平差异造成的, 可增减一些专家, 重新进行评价; 如果认为是群体思维的影响造成的, 也应积极的采取一些有效的方式避免(文[11]在这方面有较详尽的论述). 实在不行, 专家重组仍不失为一个有效的办法.

3 示 例

已知六个评价对象 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, 各有两个效益型指标 B_1, B_2 , 见表 1. 易知各评价对象的指标向量都是 Pareto 解, 无法直接给出比较. 现有 50 人组成的大型群组, 每个专家在之间给出 B_1, B_2 的分值, 见表 2. 表 2 同时给出了各专家相应的决策坐标.

表 1

指标 对象	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
指标 B_1	0.7	0.65	0.68	0.75	0.9	0.6
指标 B_2	0.65	0.8	0.7	0.6	0.5	0.85

表 2

专家序号	决策向量	决策坐标	专家序号	决策向量	决策坐标
1	(0.29, 0.96)	1.28	26	(0.19, 0.98)	1.38
2	(0.13, 0.99)	1.44	27	(0.20, 0.98)	1.37
3	(0.07, 1)	1.50	28	(0.21, 0.98)	1.36
4	(0.11, 0.99)	1.46	29	(0.25, 0.97)	1.32
5	(0.16, 0.99)	1.41	30	(0.09, 1)	1.48
6	(0.17, 0.99)	1.40	31	(0.21, 0.98)	1.36
7	(0.23, 0.97)	1.34	32	(0.22, 0.98)	1.35
8	(0.14, 0.99)	1.43	33	(0.18, 0.98)	1.39
9	(0.09, 1)	1.48	34	(0.18, 0.98)	1.39
10	(0.14, 0.99)	1.43	35	(0.25, 0.97)	1.32
11	(0.14, 0.99)	1.43	36	(0.05, 1)	1.52
12	(0.14, 0.99)	1.43	37	(0.19, 0.98)	1.38
13	(0.20, 0.98)	1.37	38	(0.20, 0.98)	1.37
14	(0.15, 0.99)	1.42	39	(0.21, 0.98)	1.36
15	(0.06, 1)	1.51	40	(0.15, 0.99)	1.42
16	(0.19, 0.98)	1.38	41	(0.16, 0.99)	1.41
17	(0.14, 0.99)	1.43	42	(0.19, 0.98)	1.38
18	(0.16, 0.99)	1.41	43	(0.12, 0.99)	1.45
19	(0.24, 0.97)	1.33	44	(0.16, 0.99)	1.41
20	(0.26, 0.97)	1.31	45	(0.17, 0.99)	1.40
21	(0.16, 0.99)	1.41	46	(0.16, 0.99)	1.41
22	(0.20, 0.98)	1.37	47	(0.17, 0.99)	1.40
23	(0.11, 0.99)	1.46	48	(0.26, 0.97)	1.31
24	(0.1, 1)	1.47	49	(0.07, 1)	1.50
25	(0.14, 0.99)	1.43	50	(0.14, 0.99)	1.43

对于 50 位专家的决策坐标, 算得均值 $\hat{\mu}=1.40$, 方差 $\hat{\sigma}^2=0.003$, $\hat{\sigma}=0.055$. 以下用 χ^2 检验法来检验假设 H_0 : 专家的决策坐标 X 服从正态分布. 相关数据见表 3.

表 3

组号	1	2	3	4	5	6	Σ
区间界限	$(-\infty, 1.30]$	$(1.30, 1.35]$	$(1.35, 1.40]$	$(1.40, 1.45]$	$(1.45, 1.50]$	$(1.50, +\infty]$	$(-\infty, +\infty)$
频数(n_i)	1	7	16	17	7	2	50
$\hat{p}_i$	0.03438	0.1267	0.3389	0.3389	0.1267	0.03438	1
$\hat{np}_i$	1.719	6.335	16.945	16.945	6.335	1.719	—
$n_i - \hat{np}_i$	-0.719	0.665	-0.945	0.055	0.665	0.281	—
$(n_i - \hat{np}_i)^2$	0.517	0.442	0.893	0.003	0.442	0.079	—
$(n_i - \hat{np}_i)^2 / \hat{np}_i$	0.301	0.0698	0.0527	0.000177	0.0698	0.0460	0.539

由 $\chi^2_{(3)} = 7.815 > 0.539$, 故群决策结果与正

态分布这一假设无显著差异, 应认为专家的决策坐

标 X 服从正态分布, 原群决策是有效决策. 以 $\hat{\mu}=1.40$ 作为理想坐标的无偏估计, 由公式(1)求得理想决策为(0.17, 0.986), 归一化得(0.15, 0.85). 有了两个指标的权重, 可得 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ 的综合评价价值分别为: 0.6575, 0.7775, 0.697, 0.6225, 0.56, 0.8125. 从而 $A_6 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_5$.

4 结 论

对于大型群组决策, 本文把受诸多随机因素影响的个体决策结果作为随机变量进行研究, 致力于寻找它服从的分布规律. 本文的主要创新之处有:

1) 应用近世代数学的相关知识定义了决策坐标, 从而使得把个体决策结果作为随机变量进行研究成为可能. 这是本文最具有创新意义的一点.

2) 在认为客观上唯一存在理想决策(值)的前提下, 基于“中心极限定理^[9]”与“极大熵准则^[10]”给出一个公理性假设, 认为专家们的决策结果(坐标)服从正态分布.

3) 给出了大型群组决策的正态均值法. 该方法是在上述公理假设基础上提出的, 它使人们摆脱了致力于研究专家水平差异(权重)、情绪、个人偏好等随机的, 又难以量化的因素对决策影响的研究, 因而本文无疑是一个有意义的尝试.

当然, 本文的后续还有很多工作要做, 比如怎样对专家们的水平差异进行假设检验, 还缺乏对正态均值法的实证研究等. 限于篇幅, 本文仅讨论此为止.

参考文献:

- [1] Nitzan S, Paroush J. Collective decision making: an economic outlook[M]. Cambridge University Press, 1985.
- [2] Karotkin D, Nitzan S. On two properties of the marginal contribution of individual decisional skills[J]. Mathematical Social Sciences, 1997, 34(1): 29~36.
- [3] Gradstein M, Nitzan S. Performance evaluation of some special classes of weighted majority rules[J]. Mathematical Social Sciences, 1986, 12(1): 31~46.
- [4] Lucas W F. Political and related models[M]. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [5] 杨雷, 席西民. 理性群体决策的概率集结研究[J]. 系统工程理论与实践, 1998, (4): 90~120.
- [6] Bordly R F, Wolff R W. On the aggregation of individual probability estimates[J]. Management Science, 1981, 27(8): 959~964.
- [7] Sapir L. The optimality of the expert and majority rules under exponentially distributed competence[J]. Theory and Decision, 1998, 45(1): 19~35.
- [8] 陆启超. 现代数学基础[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1997.
- [9] 郭绍建, 萧亮壮等. 概率统计及随机过程[M]. 北京: 航空工业出版社, 1993. 118~120.
- [10] 邱苑华. 管理决策与应用熵学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2002.
- [11] 毕鹏程, 席西民. 群体决策过程中的群体思维研究[J]. 管理科学学报. 2002(1).
- [12] Janis I L. Groupthink: Psychological of policy decisions and fiascoes[M]. Boston: Houghton Mifflin, 1982.
- [13] 邓远北, 周润兰. 应用概率统计[M]. 2001.

The Method of Normal Mean for Large Groups Decision Making

FU Li-xian

(School of Natural Science, East China Jiaotong Univ., Nanchang 330013, China)

Abstract: For the large groups, this paper defines the expert's decision coordinate and the ideal coordinate which can objectively reflect the real evaluation. And an axiomatic hypothesis is given. The decisions of groups are efficient when the stochastic variable as the decisions of experts satisfies normal distribution in large groups decisions. Then the method of normal mean for large groups decision making is given.

Key words: group decision; decision coordinate; ideal decision making; ideal coordinate; normal Distribution; χ^2 -test