文章编号:1005－0523(2004)05－0143－02

减算子新的不动点定理

盛梅波[1],范发明[2]

(1.华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013;2.井冈山学院 电子系 江西 吉安 343000)

摘要:在没有连续性条件和紧性条件下利用非对称迭代的方法研究了减算子新的不动点存在性、唯一性及迭代收敛性,得到了新的不动点定理以及给出此迭代的误差估计式.

关 键 词:减算子;正规锥;不动点.

中图分类号:O189.2 **文献标识码**:A

本文中所涉及的概念与文[5]相同.

主要结果

定理1 设 $A:[x_0,y_0]\to E$ 为减算子,存在常数 $\alpha\in[0,1)]$, $\beta\in(0,1)$, $\alpha+\beta<1$,满足下列两个条件:(Ⅰ) $x_0+\alpha(y_0-x_0)\le Ay_0$, $Ax_0\le y_0$;

(Ⅱ) $Ax-Ay\le\beta(y-x)$,当 $x_0\le x<y\le y_0$ 时;

则减算子 A 在 $[x_0,y_0]$ 上有唯一的不动点 x.

构造迭代格式:

$$\begin{cases} x_{n+1}=Ay_n-\alpha(y_n-x_n) \\ y_{n+1}=Ax_n, \qquad n=0,1,2,\cdots. \end{cases}$$

都收敛于 x,且有误差估计式:

$$\begin{cases} \|x_n-x\|\le N(\alpha+\beta)^n\|y_0-x_0\| \\ \|y_n-x\|\le N(\alpha+\beta)^n\|y_0-x_0\| \end{cases}$$

另外对 $\forall u_0\in[x_0,y_0]$,作 $u_{n+1}=Au_n$,

有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=x$

证明 1^0 由数学归纳法可得

$$x_{n-1}\le x_n<y_n\le y_{n-1}\quad n=1,2,\cdots \tag{1}$$

事实上,$n=1$ 时,由条件(Ⅰ)得

$$x_0\le Ay_0-\alpha(y_0-x_0)=x_1<Ay_0\le Ax_0$$

$=y_1\le y_0$,式(1)成立.

假设 $n=k$ 时立(1)成立,即有

$$x_{k-1}\le x_k<y_k\le y_{k-1},\ \alpha(y_k-x_k)\le\alpha(y_{k-1}-x_{k-1})$$

由于 A 是 $[x_0,y_0]$ 上减算子,则

$$Ay_{k-1}\le Ag_k\le Ax_k\le Ax_{k-1}$$

当 $n=k+1$ 时,由归纳假设得:

$$x_k=Ay_{k-1}-\alpha(y_{k-1}-x_{k-1})\le Ay_k-\alpha(y_k-x_k)$$

$=x_{k+1}\le Ay_k\le Ax_k=y_{k+1}\le Ax_{k-1}=y_k$ 式(1)成立.

2^0 下面证明 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 是 E 中的 Cauchy 列.

由 1^0 和条件(Ⅱ)以及 A 是减算子得

$$\theta\le y_n-x_n=Ax_{n-1}-Ay_{n-1}+\alpha(y_{n-1}-x_{n-1})$$

$$\le\beta(y_{n-1}-x_{n-1})+\alpha(y_{n-1}-\chi_{n-1})$$

$$=(\alpha+\beta)(y_{n-1}-x_{n-1})$$

继续可得 $\theta\le y_n-x_n\le(\alpha+\beta)(y_{n-1}-x_{n-1})$

$$\le(\alpha+\beta)^2(y_{n-2}-x_{n-2})\le\cdots$$

$$\le(\alpha+\beta)^n(y_0-x_0) \tag{2}$$

根据 P 的正规性得

$$\|x_{n+m}-x_n\|\le N(\alpha+\beta)^n\|y_0-x_0\|$$

又 $\theta\le x_{n+m}-x_n\le y_{n+m}-x_n\le y_n-x_n$

$$\le(\alpha+\beta)^n(y_0-x_0)$$

$$\theta\le y_n-y_{n+m}\le y_n-x_{n+m}\le y_n-x_n$$

$$\le(\alpha+\beta)^n(y_0-x_0)$$

故 $\|x_{n+m}-x_n\|\le N(\alpha+\beta)^n\|y_0-x_0\|$,

$$\|y_n-y_{n+m}\|\le N(\alpha+\beta)^n\|y_0-x_0\| \tag{3}$$

因此 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 是 E 中的 Cauchy 列.

收稿日期:2004－04－25

作者简介:盛梅波(1966－),男,江西波阳人,华东交通大学副教授.

3^0 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\bar{x}$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\bar{y}$,则 $\bar{x}=\bar{y}=x$ 就是 A 在 $[x_0, y_0]$ 上的不动点,

由(1)式得 $x_0\le x_n\le\bar{x}\le\bar{y}\le y_n\le y_0$,

$$\theta\le\bar{y}-\bar{x}\le y_n-x_n$$

又由(2)式得

$$\theta\le\bar{y}-\bar{x}\le y_n-x_n\le(\alpha+\beta)^n(y_0-x_0)$$

根据 P 的正规性得

$$\|\bar{y}-\bar{x}\|\le N(\alpha+\beta)^n\|y_0-x_0\|$$

即 $x_0\le x_n\le\bar{y}=\bar{x}=x\le y_n\le y_0$,从而 $x_n\le x_{n+1}=Ag_n-\alpha(y_n-x_n)\le Ay_n\le Ax\le Ax_n=y_{n+1}\le y_n$

因此

$$\theta\le Ax-x_n\le y_n-x_n\le(\alpha+\beta)^n(y_0-x_0)$$

根据 P 的正规性得

$$\|Ax-x_n\|\le N(\alpha+\beta)^n\|y_0-x_0\|$$

$$\|Ax-x\|\le\|Ax-x_n\|+\|x_n-x\|$$
$$\le 2(\alpha+\beta)^n(y_0-x_0)\to 0,\ n\to\infty$$

即 $Ax=x$

4^0 x 是唯一的.设 $Z'\ne x$ 也是 A 在 $[x_0, y_0]$ 上的不动点,则

$x_1=Ay_0-\alpha(y_0-x_0)\le Ay_0\le AZ'=Z'\le Ax_0=y_1$

由数学归纳法得 $x_n\le Z'\le y_n$,则 $\theta\le Z'-x_n\le y_n-x_n\le(\alpha+\beta)^n(y_0-x_0)$,根据 P 的正规性得 $\|Z'-x_n\|\le N(\alpha+\beta)^n\|y_0-x_0\|$

从而 $\|Z'-x\|\le\|Z'-x_n\|+\|x_n-x\|\le 2(\alpha+\beta)^n(y_0-x_0)\to 0$, $n\to\infty$,即 $Z'=x$,

若在(3)式中令 $m\to\infty$ 便可得到误差估计式.

5^0 对 $\forall u_0=[x_0, y_0]$,作 $u_{n+1}=Au_n$,有 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=x$.

注1 定理1的条件与结论不同于文[1]、[2]、[3]的相应结论,此处条件为序关系,算子是减算子,没有对称压缩的条件.

定理2 设 $A:[x_0, y_0]\to E$ 的一个减算子,若存在常数 $\beta\in(0,1)$,满足下列两个条件:

(Ⅰ) $x_0\le Ay_0$, $Ax_0\le y_0$;

(Ⅱ) $\theta\le Ax-Ay\le\beta(y-x)$,当 $x_0\le x\le y\le y_0$ 时.

则算子 A 在 $[x_0, y_0]$ 上有唯一的不动点 x_*.

构造迭代格式:$\begin{cases} x_{n+1}=Ay_n \\ y_{n+1}=Ax_n,\ n=0,1,2,\cdots. \end{cases}$

都收敛于 x_*,且有误差估计式:

$$\|x_n-x_*\|\le N\beta^n\|y_0-x_0\|$$
$$\|y_n-x_*\|\le N\beta^n\|y_0-x_0\|.$$

另外对 $\forall u_0\in[x_0, y_0]$,作 $u_{n+1}=Au_n$,有 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=x_*$.

参考文献:

[1] 颜心力.对称压缩算子方程解的存在与唯一性定理及应用[J],科学通报,1990,35(10):733~736.

[2] Guo Dajun, Lakshmikantham.v.Coupled fixed points of nonlinear operators with application[J], Nonlinear Anal., 1987, 11: 623~632.

[3] Zhang Shisheng, Guo Weiping. On the existence and uniqueness theorems of solutions for the systems of mixed monotone operator equations with applications, [J], Applied Mathematics. A Journal of Chinese Universties(SerB), 1993, 8: 11~14.

[4] 许绍元.减算子的不动点定理及其应用,[J],江西师范大学学报(自然版),2000,24(1):25~27.

[5] 郭大钧.非线性泛函分析[M],济南:山东科学技术出版社,1985.

On New Fixed Point Theorems of Decreasing Operator

SHENG Mei-bo[1], FAN Fa-ming[2]

(1.School of Natural Science East China Jiaotong University, Nanchang 330013; 2.Jing Gangshan College, Depautment of Electuonic, Jian 343000)

Abstract: In this paper, we use nonsymmetric iteration method to study existence, uniqueness and iteration of decreasing operator which only satisfy some ordered condition without continuous condition and compact condition, new fixed point theorems are obtained.

Key words: decreasing operator, normal cone, fixed point.