

文章编号: 1005—0523(2004)04—0150—04

莱布尼茨不等式的加细与扩展

刘 健¹, 褚小光²

(1. 华东交通大学, 江西 南昌 330013 2. 宁波创元服装发展有限公司 浙江 宁波, 315500)

摘要: 将三角形著名的 Leibniz 不等式加细、延拓为一个几何不等式链, 提出并应用计算机验证了四个有关的猜想.

关 键 词: 三角形; 点; 不等式

中图分类号: O. 178

文献标识码: A

1 引言与主要结果

设 $\triangle ABC$ 的重心为 G , 边 BC , CA , AB 分别为 a , b , c , 则对平面上任一点 P 有

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3PG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2). \quad (1)$$

以上等式是莱布尼茨 (Leibniz) 最先发现的, 被称为莱布尼茨恒等式. 由这一等式显然可得几何不等式:

$$R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 \geq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2), \quad (2)$$

其中 R_1, R_2, R_3 分别表示段 PA, PB, PC . 等号当且仅当 P 为 $\triangle ABC$ 的重心时成立.

不等式 (2) 自然地被称为莱布尼茨不等式. 我们已经知道莱布尼茨恒等式 (1) 可推广为更一般的情形, 参见专著 [1]. 1975 年, 美国数学家 M. S. Klamkin 首先公开在文献 [2] 中给出了莱布尼茨不等式 (2) 的以下推广:

对 $\triangle ABC$ 与任一点 P 以及任意实数 x, y, z 有

$$(x + y + z)(xR_1^2 + yR_2^2 + zR_3^2) \geq yza^2 + zxb^2 + xyc^2, \quad (3)$$

等号当且仅当 $x : y : z = S_{\triangle BPC} : S_{\triangle CPA} : S_{\triangle APB}$ 时

成立.

Klamkin 不等式 (3) 可以导出许多重要的三角形几何不等式, 因此被视为三角形的一个基本不等式.

本文中, 我们对平面上任一点, 将莱布尼茨不等式 (2) 加细、延拓为下述不等式链:

定理 设 $\triangle ABC$ 平面上任一点 P 到边 BC , CA , AB 与顶点的距离分别为 r_1, r_2, r_3 和 R_1, R_2, R_3 . 又记边 BC, CA, AB 上的中线分别为 m_a, m_b, m_c , 则

$$\frac{1}{2} \left(\frac{r_2^2 + r_3^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{r_3^2 + r_1^2}{\sin^2 \frac{B}{2}} + \frac{r_1^2 + r_2^2}{\sin^2 \frac{C}{2}} \right) \geq R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 \geq \frac{2}{3} (m_a R_1 + m_b R_2 + m_c R_3) \geq \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + c^2), \quad (4)$$

式中第一个等号仅当 P 为 $\triangle ABC$ 的内心时取得, 第二与第三个等号仅当 P 为 $\triangle ABC$ 的重心时取得.

2 定理的证明

在证明定理之前先给出三个引理.

引理 1 设平面上任一点 P 关于 $\triangle ABC$ 的重心坐标为 (x, y, z) , $\triangle ABC$ 的边 BC, CA, AB 上的高线分别为 h_a, h_b, h_c , 其余符号同上, 则有

$$(x + y + z)r_1 = xh_a, (x + y + z)r_2 = xh_b,$$

收稿日期: 2004—06—13

作者简介: 刘 健 (1963—), 男, 江西兴国人, 助理研究员, 主要从事几何不等式的研究.

$$\begin{aligned}
 (x+y+z)r_3 &= zh_c, \\
 (x+y+z)R_1 &= \sqrt{(y+z)(yc^2+zb^2)-yza^2}, \\
 (x+y+z)R_2 &= \sqrt{(z+x)(za^2+xc^2)-zxb^2}, \\
 (x+y+z)R_3 &= \sqrt{(x+y)(xb^2+ya^2)-xyc^2}.
 \end{aligned}$$

以上公式是已知的,证明从略.

引理2 以 $\sum$ 表示循环和,则在 $\triangle ABC$ 中有
 $2\sum a^5 - \sum a\sum a^4 + 2abc\sum bc > 0$. (5)

证 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径与内切圆半径以及半周分别为 R, r, s (下同此). 以 $\sum a = 2s$ 与已知的恒等式:

$$\sum bc = s^2 + 4Rr + r^2, \quad (6)$$

$$\sum a^4 = 2s^4 - (16Rr + 12r^2)s^2 + 2(4R + r)^2r^2, \quad (7)$$

以及文献[3]中已证的恒等式:

$$\sum a^5 = 2s[s^4 - (10Rr + 10r^2)s^2 + (4Rr + r^2)(10Rr + 5r^2)], \quad (8)$$

代入(5)的左边(记其值为 M),可得

$$M = 16sr^2(8R^2 + 6Rr + r^2 - s^2),$$

由著名的 Gerretsen 不等式 $4R^2 + 4Rr + r^2 \geq s^2$ (见[1]),就知 $M > 0$, 所以不等式(5)得证.

引理3 对 $\triangle ABC$ 平面上任意两点 P 与 Q 有
 $aPA \cdot QA + bPB \cdot QB + cPC \cdot QC \geq abc$, (9)

等号当且仅当 P 与 Q 为一对等角共轭点时成立.

不等式(9)是一个已知的重要结果, D. S. Mitrić 与 J. E. Pečarić 等曾在专著[1]中应用 Klamkin 不等式(3)给出一个有趣的证明. 另外, 不等式(9)也是文献[4]中主要结果的一个推论.

为简起见, 以下均用 $\sum$ 表示循环和.

定理的证明 首先, 来证不等式链(4)的第一个不等式的等价式:

$$\sum \frac{r_2^2 + r_3^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} \geq 2\sum R_1^2. \quad (10)$$

由引理1知

$$\begin{aligned}
 (\sum x)^2 \sum R_1^2 &= \sum (y+z)(yc^2+zb^2) - \sum yza^2 \\
 &= \sum (b^2+c^2)x^2 + \sum (b^2+c^2-a^2)yz.
 \end{aligned}$$

又注意到 $bc = 2Rh_a$ 与半角公式:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \quad (11)$$

以及恒等式:

$$\frac{abc}{(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{4R}{r}, \quad (12)$$

由引理1知

$$\begin{aligned}
 (\sum x)^2 \sum \frac{r_2^2 + r_3^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} &= \sum \frac{y^2 h_b^2 + z^2 h_c^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} \\
 &= \frac{1}{4R^2} \sum \frac{a^2(y^2 c^2 + z^2 b^2)}{\sin^2 \frac{A}{2}} \\
 &= \frac{1}{4R^2} \sum \frac{bca^2(y^2 c^2 + z^2 b^2)}{(s-b)(s-c)} \\
 &= \frac{abc}{4(s-a)(s-b)(s-c)R^2} \\
 &\quad \cdot \sum a(s-a)(y^2 c^2 + z^2 b^2) \\
 &= \frac{1}{Rr} \sum bc[b(s-c) + c(s-b)]x^2.
 \end{aligned}$$

于是可见, 要证不等式(10)只要证:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2Rr} \sum bc[b(s-c) + c(s-b)]x^2 \\
 &\geq \sum (b^2 + c^2)x^2 + \sum yz(b^2 + c^2 - a^2),
 \end{aligned}$$

两边乘以 $2abc$, 注意到 $abc = 4Rs$, 即知上式等价于

$$\begin{aligned}
 &4s \sum bc[b(s-c) + c(s-b)]x^2 \\
 &\geq 2abc[\sum (b^2 + c^2)x^2 + \sum yz(b^2 + c^2 - a^2)].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &4sbc[b(s-c) + c(s-b)] - 2abc(b^2 + c^2) \\
 &= bc(b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - 2bc),
 \end{aligned} \quad (13)$$

所以(10)式的证明可化为

$$\begin{aligned}
 &\sum bc(b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - 2bc)x^2 \\
 &\geq 2abc \sum (b^2 + c^2 - a^2)yz.
 \end{aligned} \quad (14)$$

记上式左边减去右边的差为 W , 则经过计算、配方可得

$$\begin{aligned}
 W &= \left[Tx - \frac{abc(a^2 + b^2 - c^2)y + abc(c^2 + a^2 - b^2)z}{T} \right]^2 \\
 &\quad + \frac{a[2\sum a^5 - \sum a\sum a^4 + 2abc\sum bc]}{T^2} (cy - bz)^2,
 \end{aligned}$$

$$\text{其中 } T = \sqrt{bc(b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - 2bc)}.$$

由引理2可知 $W \geq 0$, 于是不等式(10)得证, 且根据以上 W 的配方式容易确定(10)式中等号仅当 P 的重心坐标 (x, y, z) 满足 $x : y : z = a : b : c$ 时成立, 从而可知(10)式中的等号仅当 P 为 $\triangle ABC$ 的内心时成立.

其次, 我们来证不等式链(4)的第二个不等式:

$$\sum R_1^2 \geq \frac{2}{3} \sum m_a R_1. \quad (15)$$

按 Cauchy 不等式有

$$\begin{aligned}
 &(m_a R_1 + m_b R_2 + m_c R_3)^2 \\
 &\leq (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)(R_1^2 + R_2^2 + R_3^2),
 \end{aligned}$$

再由恒等式:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \quad (16)$$

与莱布尼茨不等式(3)就知

$$(m_a R_1 + m_b R_2 + m_c R_3)^2 \leq \frac{9}{4}(R_1^2 + R_2^2 + R_3^2)^2$$

从而可知不等式(15)成立,且显然其等号仅当 P 为 $\triangle ABC$ 的重心时成立.

最后,我们来证不等式链(4)的最后一个不等式的等价式:

$$\sum m_a R_1 \geq \frac{1}{2} \sum a^2. \quad (17)$$

注意到 $\triangle ABC$ 共轭重心 K 的重心坐标是 (a^2, b^2, c^2) , 由引理 1 可得

$(a^2 + b^2 + c^2)AK = \sqrt{2b^2c^2(b^2 + c^2) - b^2c^2a^2}$, 再利用公式 $4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$, 就得

$$KA = \frac{2bcm_a}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (18)$$

在引理 3 的不等式(9)中令 Q 为 $\triangle ABC$ 的共轭重心, 利用公式(18)及相应的另两式, 并在两边乘以 $a^2 + b^2 + c^2$, 即得

$$2bcm_a \cdot aPA + 2cam_b \cdot bPB + 2abm_c \cdot cPC \geq abc(a^2 + b^2 + c^2),$$

约简即得不等式(17), 且按(9)式等号成立的条件即知, (17)式等号仅当 P 为 $\triangle ABC$ 的重心时成立. 至此, 定理证明完毕.

3 几个猜想

在定理的第一个不等式即不等式(10)中, 令 P 为 $\triangle ABC$ 的重心, 则此时有 $r_1 = \frac{1}{3}h_a$, $r_2 = \frac{1}{3}h_b$, $r_3 = \frac{1}{3}h_c$, $R_1 = \frac{2}{3}m_a$, $R_2 = \frac{2}{3}m_b$, $R_3 = \frac{2}{3}m_c$, 于是得

$$\sum \frac{h_b^2 + h_c^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} \geq 8 \sum m_a^2, \quad (19)$$

注意到 $h_b = 2R \sin C \sin A$, $h_c = 2R \sin A \sin B$, 利用恒等式(16)与正弦定理就得

$$\sum (b^2 + c^2) \cos^2 \frac{A}{2} \geq \frac{3}{2} \sum a^2. \quad (20)$$

这一不等式启发我们证明了一般的结论(证略): 当 $k > 1$ 时有

$$\sum (b^k + c^k) \cos^2 \frac{A}{2} \geq \frac{3}{2} \sum a^k. \quad (21)$$

当 $k < 1$ 时, 上式中不等号反向. $k = 1$ 时, 上式取等号.

由(21)作类比猜测, 我们提出类似的下述

猜想 1 当 $k \geq 1$ 时, 在 $\triangle ABC$ 中有

$$\sum (r_b^k + r_c^k) \cos^2 \frac{A}{2} \geq \frac{3}{2} \sum r_a^k. \quad (22)$$

注: 当 $k < 0$ 时易证上式反向.

由不等式链(4)的第二个不等式受到启发, 我们提出类似于(15)式的两个猜想不等式(符号同上):

猜想 2 对 $\triangle ABC$ 平面上任一点 P 有

$$R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 \geq \frac{4}{3}(m_a r_1 + m_b r_2 + m_c r_3). \quad (23)$$

猜想 3 对 $\triangle ABC$ 平面上任一点 P 有

$$R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 \geq \frac{2}{3}[m_a(r_2 + r_3) + m_b(r_3 + r_1) + m_c(r_1 + r_2)]. \quad (24)$$

如果不等式(22)与不等式(23)成立, 显然可得

$$\frac{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2}{r_1 + r_2 + r_3} \geq \frac{4}{9}(m_a + m_b + m_c). \quad (25)$$

事实上这个不等式不仅成立, 而且可加强为以下更漂亮、更简洁的下式(参见文献[5]):

$$\frac{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2}{r_1 + r_2 + r_3} \geq 2R. \quad (26)$$

从另一个角度出发, 我们猜测不等式(25)还可作以下加强:

猜想 4 对 $\triangle ABC$ 平面上任一点 P 有

$$\frac{R_2 R_3 + R_3 R_1 + R_1 R_2}{r_1 + r_2 + r_3} \geq 4(m_a + m_b + m_c)/9. \quad (27)$$

计算机的验证强力支持以上诸猜想成立.

参考文献:

- [1] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić and V. Volenec, Recent Advances in Geometric Inequalities[M], Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [2] M. S. Klamkin, Geometric Inequalities via the Polar Moment of Inertia, Math. Mag. 48(1975), 44—46.
- [3] 李蕾英, 刘健. 关于角平分线的一个不等式链[J], 江西电力职工大学学报, 2002, 15(4): 13—15.
- [4] 刘健. 多角形的一个不等式[J], 湖南数学通讯, 1991, 5: 35—36.
- [5] 褚小光, 萧振纲. 若干几何不等式猜想的证明[J], 湖南理工学院学报, 2003, 18(4): 10—13.

Refinement and Extension about the Leibnize Inequality

LIU Jian¹, CHU Xiao-guang²

(1·East China Jiaotong University, Nanchang 330013; 2· Ningbo Chuangyuan Clothing Development Limited Company, Ningbo 315500, China·)

Abstract:Refining the famous Leibniz Inequality and extending it to be a geometric inequality chains, four conjectures concerned are put forward and verified by the computer.

Key words:triangle; inequality; point

(上接第 135 页)

3-edge-connected Graphs and 4-matchings

CHENG Yun, LIU Zhan-hong

(Insitute of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang 330027, China)

Abstract:Let G be a 3-edge-connected simple graph of order n . For a 4-matching M_4 of G , let $\Sigma(M_4)$ denote the sum of the degrees of the eight vertices incident with M_4 . We show that if $\Sigma(M_4) \geq 2n + 3$ for all 4-matchings M_4 of G , then either G is collapsible, or G is the Petersen graph.

Key words:3-edge-connected graphs; 4-matchings; collapsible graphs; the Petersen graph