

文章编号: 1005—0523(2004)05—0154—03

一类复合函数的高阶导数公式及其应用

周学松

(浙江工商大学 统计与计算科学学院, 浙江 杭州, 310035)

摘要: 给出一类复合函数 $y=f(a+bx^2)$ 的高阶导数公式并通过求文献[1]中问题 1077 的解, 证明了

$$\sum_{i=1}^N i C_{2k}^i C_{2s-1}^i = (2s-1) C_{2k+2s-2}^N \quad N = \min\{2k, 2s-1\}$$

关 键 词: 高阶导数; 广义积分; 留数

中图分类号: O. 175

文献标识码: A

众所周知, 求复合函数高阶导数公式是一个很困难的问题, 本文对复合函数 $y=f(a+bx^2)$ 给出其 n 阶导数公式, 并给出文献[1]中问题 10777: $\int_0^\infty \frac{d^m}{dx^m} \left(\frac{1}{1+x^2} \right) \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{1+x^2} \right) dx = ?$ 的求解公式.

定义 数 $Z_k^n = \sum_{j_1=1}^n (j_1 \sum_{j_2=1}^{j_1+1} (\cdots (j_{k-2} \sum_{j_{k-1}=1}^{j_{k-2}+1} j_{k-1} \sum_{i=1}^{j_{k-1}+1} i) \cdots))$, 规定 $Z^0=1$. 则, $Z_k^n = \sum_{j=1}^n (j Z_{k-1}^{j+1})$ (1)

定理 1 设函数 f 存在 N 阶导数, 则

$$(f(a+bx^2))^{(N)} = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{2k-1}{2} \rfloor} (2b)^j z_j^{2k-2j} \frac{d^{2k-1-j}}{du^{2k-1-j}} (f(u)) (2bx)^{2k-1-2j}, & N=2k-1, k=1, 2, \dots \\ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{2k}{2} \rfloor - 1} (2b)^j z_j^{2k-2j+1} \frac{d^{2k-j}}{du^{2k-j}} (f(u)) (2bx)^{2k-2j} + \\ (2b)^k Z_{k-1}^2 \frac{d^k}{du^k} (f(u)), & N=2k, k=1, 2, \dots \end{cases} \quad (2)$$

其中 $u = a + bx^2$

证明 $k=1$ 时是显然的.

假设 $k=m$ 时结论成立. 即

$$\begin{aligned} (f(a+bx^2))^{(2m)} &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{2m}{2} \rfloor - 1} (2b)^j \cdot Z_j^{2m-2j+1} \frac{d^{2m-j}}{du^{2m-j}} (f(u)) \cdot (2bx)^{2m-2j} + (2b)^m Z_{m-1}^2 \frac{d^m}{du^m} (f(u)) \\ \Rightarrow (f(a+bx^2))^{(2m+1)} &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{2m}{2} \rfloor - 1} (2b)^j \cdot Z_j^{2m-2j+1} \cdot (f^{(2m-1)}(u)) \cdot (2bx)^{2m-2j} + \\ &+ (2b)^m \cdot Z_{m-1}^2 \cdot f^{(m+1)}(u) \cdot (2bx) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} (2b)^j Z_j^{2m-2j+1} \cdot (f^{(2m-j+1)}(u)) \cdot (2bx)^{2m-2j} \end{aligned}$$

收稿日期: 2004—04—13

作者简介: 周学松(1956—), 男, 湖北武汉人, 教授.

$$\begin{aligned}
& +f^{(2m-1)}+f^{(2m-j)}(u) \cdot(2 m-2 j)(2 b x)^{2 m-2 j-1} \cdot 2 b \\
& +(2 b)^m \cdot Z_{m-1}^2 \cdot f^{(m+1)}(u) \cdot(2 b x) \\
& =f^{(2 m+1)}(u) \cdot(2 b x)^{2 m+1}+f^{(2 m)}(u) \cdot 2 m \cdot 2 b \cdot(2 b x)^{2 m-1} \\
& +f^{(2 m)}(u) \cdot Z_1^{2 m-1} \cdot 2 b \cdot(2 b x)^{2 m-1}+ \\
& f^{(2 m-1)}(u) \cdot Z^{(2 m-1)}(u) \cdot Z_1^{2 m-1} \cdot(2 b)^2 \cdot(2 m-2) \cdot(2 b x)^{2 m-3} \\
& +f^{(2 m-1)}(u) \cdot Z_2^{2 m-3} \cdot(2 b)^2 \cdot(2 b x)^{2 m-3}+\cdots+f^{(m+2)}(u) \cdot Z_{m-2}^5 \cdot(2 b)^{m-1} \cdot 4 \cdot(2 b x)^3 \\
& +f^{(m+2)}(u) \cdot Z_{m-1}^3 \cdot(2 b)^{m-1} \cdot(2 b x)^3+f^{(m+1)}(u) \cdot Z_{m-1}^3 \cdot(2 b)^m \cdot 2 \cdot(2 b x) \\
& +f^{(m+1)}(u) \cdot Z_{m-1}^2 \cdot(2 b)^m \cdot(2 b x) \\
& \stackrel{(1)}{=} f^{(2 m+1)}(u) \cdot(2 b x)^{2 m+1}+f^{(2 m)}(u) \cdot Z_1^{2 m} \cdot 2 b \cdot(2 b x)^{2 m-1} \\
& +f^{(2 m-1)}(u) \cdot Z_2^{2 m-2} \cdot(2 b)^2 \cdot(2 b x)^{2 m-3}+\cdots+f^{(m+2)}(u) \cdot Z_{m-1}^4 \cdot(2 b)^{m-1} \cdot(2 b x)^3 \\
& +f^{(m+1)}(u) \cdot Z_m^2 \cdot(2 b)^m \cdot(2 b x) \\
& =\sum_{j=0}^{m-1}(2 b)^j \cdot Z_j^{2 m-2 j+2} \cdot f^{(2(m+1)-j-1)}(u) \cdot Z_1^{2 m} \cdot 2 b \cdot(2 b x)^{2(m+1)-2 j-1} \\
& \Rightarrow(2) \text { 在 } k=m+1 \text { 时成立, 同理由 (2) 可得 (3) 在 } k=m+1 \text { 时也成立 (毕)}
\end{aligned}$$

文献[1]中给出问题(problem10777):如何计算 $\int_0^{\infty} \frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) dx$?

用本文结果(2),(3)可以计算,下面用另外两种方法来计算.

第一种留数方法: $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(m)}=\frac{1}{2 i}\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right)^{(m)}=\frac{1}{2 i}\left(\frac{(-1)^m m!}{(x-i)^{m+1}}-\frac{(-1)^m m!}{(x+i)^{m+1}}\right)$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(m)}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)} dx=\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(m)}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)} dx \\
& =\frac{(-1)^{m+n} m! n!}{-8} \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{(x-i)^{m+n+2}}-\frac{1}{(x-i)^{m+1}} \frac{1}{(x+i)^{n+1}}\right. \\
& \left.-\frac{1}{(x+i)^{m+1}} \frac{1}{(x-i)^{n+1}}+\frac{1}{(x+i)^{m+n+2}}\right) dx \\
& \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-i)^{m+n+2}} dx=2 \pi i \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-i)^{m+n+2}}, z=i\right]=0, \\
& \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+i)^{m+n+2}} dx=2 \pi i \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-i)^{m+n+2}}, z=2\right]=0 \\
& =\frac{(-1)^{m+n} m! n!}{8} \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{(x-i)^{m+1}} \frac{1}{(x+i)^{n+1}}+\frac{1}{(x-i)^{n+1}} \frac{1}{(x+i)^{m+1}}\right) dx \\
& =\frac{(-1)^{m+n} m! n!}{8} 2 \pi i\left[\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z+i)^{n+1}} \frac{1}{(z-i)^{m+1}}, z=i\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z+i)^{m+1}} \frac{1}{(z-i)^{n+1}}, z=i\right]\right] \\
& =\frac{\pi i}{4} m! n!\left[\lim _{z \rightarrow i}\left(\frac{1}{(z+1)^{n+1}}\right)^{(m)} \cdot \frac{1}{m!}\right. \\
& \quad \left.+\lim _{z \rightarrow i}\left(\frac{1}{(z+1)^{m+1}}\right)^{(n)} \cdot \frac{1}{n!}\right] \\
& =\frac{\pi i}{4} m! n!\left[\lim _{z \rightarrow i} \frac{(-1)^m(m+1)(n+2) \cdots(n+m)}{(z+i)^{n+m+1}} \frac{1}{m!}\right. \\
& \quad \left.+\lim _{z \rightarrow i} \frac{(-1)^n(m+1)(m+2) \cdots(n+m)}{(z+i)^{n+m+1}} \frac{1}{n!}\right] \\
& =\frac{\pi}{4}(m+n) ! \frac{1}{2^{n+m+1}}\left(\frac{(-1)^m+(-1)^n}{i^{n+m}}\right) \\
& =\begin{cases} \frac{\pi(m+n)!}{2^{m+n+2}}(-1)^{\frac{m-n}{2}}, m \text { 与 } n \text { 的奇偶性相同} \\ 0, m \text { 与 } n \text { 的奇偶性不同} \end{cases}
\end{aligned}$$

(4)

$$\text{定理 2} \quad \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^{(n)} = \begin{cases} \frac{(-1)^k n!}{2^{n+1}} \sum_{i=1}^{n+1} C_{n+1}^i \sin(2i)t, & n=2k-1 \\ \frac{(-1)^k n!}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i \cos(2i)t, & n=2k \end{cases} \quad (5)$$

$$k=1, 2, \dots, x=\tan t$$

利用定理 2 得:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{1+x^2} \right) \frac{d^m}{dx^m} \left(\frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{i=1}^{2k} \frac{(-1)^k (2k-1)!}{2^{2k}} C_{2k}^i \sin(2i)t \right) \left(\left(\frac{1}{1+x^2} \right)^{(m-1)} \right)'_t dt & n \text{ 与 } m \text{ 同为奇数} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{i=0}^{2k+1} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k+1}} C_{2k+1}^i \cos(2i)t \right) \left(\left(\frac{1}{1+x^2} \right)^{(m-1)} \right)'_t dt & n \text{ 与 } m \text{ 同为奇数} \end{cases} \\ & \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{1}{1+x^2} \right)^{(m-1)} \right]^{m=2s-1} = \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{1}{1+x^2} \right)^{(2s-2)} \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{(-1)^{s-1} (2s-2)!}{2^{2s-1}} \sum_{i=1}^{2s-1} C_{2s-1}^i \cos(2i)t \right] \\ &= \frac{(-1)^s (2s-2)!}{2^{2s-2}} \sum_{i=1}^{2s-1} C_{2s-1}^i \sin(2i)t \\ & n \text{ 与 } m \text{ 均为奇数时,} \\ & \int_0^{+\infty} \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{1+x^2} \right) \frac{d^m}{dx^m} \left(\frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{(-1)^{k+s} (2k-1)! (2s-2)!}{2^{2k+2s}} \pi \sum_{i=1}^M i C_{2k}^i C_{2s-1}^i \quad (7) \\ & \text{其中 } M = \min\{2k, 2s-1\} \end{aligned}$$

由(4)与(7)得:

$$\text{定理 3} \quad \forall k, s \in N^+, \sum_{i=1}^M i C_{2k}^i C_{2s-1}^i = \frac{(2k+2s-2)!}{(2k-1)! (2s-2)!} = (2s-1) C_{2k+2s-2}^M, M = \min\{2k-1, 2s-1\}$$

$$\text{定理 4} \quad \forall k \in N^+ \quad Z_{k-1}^2 = (2k-1)!!$$

参考文献:

- [1] The American Mathematical Monthly. Problem 10777
- [2] Γ·M·菲赫金哥尔茨著. 微积分学教程[M]. 北京: 人民教育出版社, 1978.
- [3] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.
- [4] 金亿丹. 复变函数与拉普拉斯变换[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1999.
- [5] 马来焕, 安健. 数学分析学习研究[M]. 西北大学出版社, 2001.

The Higher Derivative Formula of a Compound Function and its Application.

ZHOU Xue-song

(Hangzhou University of Commerce · Hangzhou 310035, China)

Abstract: This paper gives a higher derivative formula of a compound function $y=f(a+bx^2)$ and an answer to the question 1077 in reference[1].

Key word: higher derivation; general integral; remained number