

文章编号: 1005-0523(2005)02-0136-03

# 关于 $n$ 阶图的最小减控制数

徐保根

(华东交通大学 基础科学学院, 江西 南昌 330013)

**摘要:** 设  $n \geq 2$ ,  $R(n)$  表示所有  $n$  阶图的最小减控制数, 本文确定了  $R(n)$  的值, 即  $R(n) = \frac{(s-1)(4-s)}{2} + \min \left\{ 0, 2 - n + \binom{s}{2} \right\}$ , 其中  $\binom{s}{2} \leq n < \binom{s+1}{2}$ , 这里  $\binom{x}{2}$  表示  $x$  个中取 2 个的组合数.

**关键词:** 减控制函数; 减控制数; 符号控制函数; 符号控制数

**中图分类号:** O157.5

**文献标识码:** A

本文所指的图均为无向简单图, 文中未说明的符号和术语同于文献[1, 8].

设  $G=(V, E)$  为一个图, 其顶点集  $V=V(G)$  和边集  $E=E(G)$ , 对于任意  $u \in V(G)$ , 则  $N_G(u)$  为  $u$  点在  $G$  中的邻域,  $N_G[u] = N_G(u) \cup \{u\}$  为  $u$  点在  $G$  中的闭邻域, 在不混淆情况下,  $N_G(u)$  和  $N_G[u]$  可分别简记为  $N(u)$  和  $N[u]$ . 若  $S \subseteq V$  则  $G[S]$  表示  $S$  在  $G$  中的导出子图. 若  $A, B \subseteq V$ , 则记  $E(A, B) = \{uv \in E \mid u \in A, v \in B\}$ .

对于一个实值函数  $f: V \rightarrow R$  和一个子集  $S \subseteq V$ , 则记  $f(S) = \sum_{u \in S} f(u)$ . 对于任意  $v \in V(G)$ , 则  $f(N[v])$  可简记为  $f[v]$ . 此外,  $f(v)$  称为  $v$  点在  $f$  下的符号.

**定义 1** [1~2] 设  $G=(V, E)$  为一个图, 一个函数  $f: V \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  如果使得对每个顶点  $v \in V$ , 均有  $f[v] \geq 1$  成立, 则称  $f$  为图  $G$  的一个减控制 (minus domination) 函数, 图  $G$  的减控制数定义为  $\gamma^-(G) = \min \{f(V) \mid f \text{ 为图 } G \text{ 的减控制函数}\}$ .

如果将上述定义中的  $\{-1, 0, 1\}$  替换成  $\{-1, 1\}$ , 则对应地定义一个图  $G$  的符号控制 (signed domination) 函数和符号控制数  $\gamma_s(G)$ .

显然, 一个图  $G$  的符号控制函数也是图  $G$  减控制函数, 因此对任意图  $G$ , 均有  $\gamma_s(G) \geq \gamma^-(G)$  成立. 对于图的符号控制数, 已有不少的结果, 我们在 [2] 中给出了其最好可能的下界

**引理 1**<sup>[2]</sup> 对任意  $n$  阶图  $G(n \geq 1)$ , 均有

$$\gamma_s(G) \geq \frac{-1 + \sqrt{1+8n}}{2} - n$$

并且此下界是最好可能的.

而对于图  $G$  减控制数, 文 [1] 和 [3] 中分别对一些特殊图给出  $\gamma^-(G)$  的下界, 主要包括:

**引理 2**<sup>[1]</sup> (1) 若图  $G$  的最大度  $\Delta(G) \leq 3$ , 或者  $G$  为任意一棵树, 则  $\gamma^-(G) \geq 1$ .

(2) 对于任意  $n$  阶  $r$ -正则图  $G$ , 均有  $\gamma^-(G) \geq n/(n+1)$

**引理 3**<sup>[3]</sup> (1) 对于任意  $n$  阶图  $G(n \geq 1)$ , 均有  $\gamma^-(G) \geq 4(\sqrt{1+8n}-1)-n$

(2) 对于任意  $n$  阶无三角形图  $G$  均有  $\gamma^-(G) \geq 4(\sqrt{n+1}-1)-n$ .

在本文中, 我们确定所有  $n$  阶图的最小减控制数 ( $n \geq 2$ ).

**定理 1** 设整数  $n \geq 2$ ,  $R(n)$  表示所有  $n$  阶图

收稿日期: 2004-06-10

基金项目: 江西省自然科学基金资助项目 (0311047)

作者简介: 徐保根 (1963-) 男, 江西南昌人, 教授.

中国知网 <https://www.cnki.net>

的最小减控制数, 令  $\binom{s}{2} \leq n < \binom{s+1}{2}$ , 则有  $R(n) = \frac{(s-1)(4-s)}{2} + \min \left\{ 0, 2-n + \binom{s}{2} \right\}$

**证明** 当  $n=2$  时,  $s=2$ , 显然  $R(2)=1$ , 定理成立. 下设  $n \geq 3$ .

为了方便, 记  $Q(n) = \frac{(s-1)(4-s)}{2} + \min \left\{ 0, 2-n + \binom{s}{2} \right\}$ .

首先我们证明:  $R(n) \geq Q(n)$ .

取一个  $n$  阶图  $G=(V, E)$  使得  $\gamma^-(G) = R(n)$ . 由定义, 存在图  $G$  的一个减控制函数  $f$  使得  $f(V) = \gamma^-(G)$ .

$$\begin{aligned} \text{令: } A &= \{v \in V | f(v) = 1\}, \\ B &= \{v \in V | f(v) = -1\}, \\ C &= \{v \in V | f(v) = 0\} \\ &= V(A \cup B). \end{aligned}$$

记  $|A|=t, |B|=r$ , 可见  $R(n) = \gamma^-(G) = t - r$

**情况 1** 当  $t=1$  时:

由减控制函数  $f$  的定义可知,  $B$  中每个顶点至少邻接  $A$  中两个顶点, 因此  $B = \emptyset$ , 从而  $f(V) = 1$ . 注意到  $n \geq 3$ , 因此  $s \geq 3$ . 即有

$$R(n) = \gamma^-(G) = f(V) = 1 \geq \frac{(s-1)(4-s)}{2} \geq Q(n)$$

**情况 2** 当  $2 \leq t \leq s-1$  时:

由于  $B$  中每个顶点至少邻接  $A$  中两个顶点, 即  $|E(A, B)| \geq 2|B|$ . 假若  $|B|=r \geq \binom{t}{2} + 1$ , 即有  $|E(A, B)| \geq t(t-1) + 2$ , 则  $A$  中至少有一个顶点  $v$  邻接  $B$  中至少  $t$  个顶点, 从而  $f[v] = \sum_{u \in N[v]} f(u) \leq 0$ , 这与减控制函数  $f$  的定义矛盾. 因此,  $r \leq \binom{t}{2}$

注意到函数  $g(x) = x - \frac{x(x-1)}{2}$  为  $[2, +\infty)$  上的递减函数, 我们有

$$\begin{aligned} R(n) &= \gamma^-(G) = f(V) = t - r \geq t - \binom{t}{2} \geq s-1 \\ -\binom{s-1}{2} &= \frac{(s-1)(4-s)}{2} \geq Q(n). \end{aligned}$$

**情况 3** 当  $t \geq s$  时:

由于  $\gamma \leq n-t, R(n) = f(V) = t-r \geq 2t-n \geq 2s-n$

(1) 当  $\binom{s}{2} \geq n-2$  时, 注意到  $\binom{s}{2} \leq n$ , 我们有  $R(n) \geq 2s-n = \frac{(s-1)(4-s)}{2} + \binom{s}{2} - n + 2 \geq \frac{(s-1)(4-s)}{2} \geq Q(n)$ .

(2) 当  $\binom{s}{2} \leq n-3$  时,  $R(n) \geq 2s-n = \frac{(s-1)(4-s)}{2} + \binom{s}{2} - n + 2 = Q(n)$ .

至此, 我们已经证明了:  $R(n) \geq Q(n) \cdots$

下面我们对每个正整数  $n \geq 2$ , 构造一个  $n$  阶图  $G$  使得  $\gamma^-(G) = Q(n)$ .

当  $n=2$  时,  $s=2$ . 令  $G=K_2$  为 2 阶完全图, 显然  $\gamma^-(G) = Q(n) = 1$ . 下设  $n \geq 3$ .

记:  $V(G) = A \cup B \cup C$ , 正整数  $s$  是由不等式  $\binom{s}{2} \leq n < \binom{s+1}{2}$  唯一确定.

$$\begin{aligned} \text{令: } A &= \{u_1, u_2, \dots, u_{s-1}\} \\ B &= \{v_1, v_2, \dots, v_t\} \\ C &= \{w_1, w_2, \dots, w_r\} \end{aligned}$$

其中  $\binom{s-1}{2}, r = n - (s-1) - \binom{s-1}{2} = n - \binom{s}{2} \geq 0$ .

令  $G[A] = K_{s-1}$  为一个  $s-1$  阶完全图. 将  $B$  中每个顶点均邻接  $A$  中的恰好 2 个顶点, 且  $A$  中的每个顶点均恰好邻接  $B$  中的  $s-2$  个顶点, 这样  $|E(A, B)| = 2t = (s-1)(s-2)$ . 令  $E(G[B]) = \emptyset$ , 而  $E(A, C)$  及  $E(G[C])$  中的边按下面三种情况来确定, 从而构造出图  $G$  并定义图  $G$  的一个减控制函数  $f$  如下:

**情况 a** 当  $r=0$  时: 即  $C = \emptyset, n = \binom{s}{2}$ , 图  $G$  构造完毕, 定义图  $G$  的一个减控制函数  $f$  如下: 当  $v \in A$  时  $f(v) = 1$ ; 当  $v \in B$  时  $f(v) = -1$ .

$$\text{可见 } f(V) = s-1-t = \frac{(s-1)(4-s)}{2} = Q(n).$$

**情况 b** 当  $r=1$ : 即  $C = \{w_1\}, n = \binom{s}{2} + 1$ , 将  $w_1$  邻接  $A$  中(至少)一个顶点. 图  $G$  构造完毕, 定义图  $G$  的一个减控制函数  $f$  如下:

当  $v \in A$  时  $f(v) = 1$ ; 当  $v \in B$  时  $f(v) = -1$ ;  $f(w_1) = 0$ . 同样有  $f(V) = Q(n)$ .

**情况 c** 当  $r \geq 2$  时:  $r = n - \binom{s}{2} \geq 2$ , 注意到  $n$

$\leq \binom{s+1}{2}$ , 故  $r \leq s-1$ .

首先将  $w_1$  邻接  $A$  中的每一个顶点和  $C$  中(除  $w_1$  本身外)的每一个顶点, 而对于每一个  $i=2, 3, \dots, r$ , 将  $w_i$  邻接  $A$  中的  $u_i$  点. 图  $G$  构造完毕, 定义图  $G$  的一个函数  $f$  如下:

当  $v \in A \cup \{w_1\}$  时,  $f(v)=1$ ; 当  $v \in B \cup \{w_2, w_3, \dots, w_r\}$  时,  $f(v)=-1$ .

不难验证,  $f$  为图  $G$  的一个减控制函数, 并且注意到  $\binom{s}{2} - n + 2 \leq 0$ , 因此,  $f(V) = s - (n - s) = \frac{(s-1)(4-s)}{2} + \binom{s}{2} - n + 2 = Q(n)$ .

综上所述, 我们已经构造了一个  $n$  阶图  $G$ , 并且定义了图  $G$  的一个减控制函数  $f$ , 使得  $f(V) = Q(n)$ . 由定义 1 及  $R(n)$  的定义得知,  $R(n) \leq \gamma^-(G) \leq f(V) = Q(n)$ , 结合 (\*) 式得到  $R(n) = Q(n)$ . 至此, 定理 1 证毕.

上述定理确定了所有  $n$  阶图的最小减控制数, 当然对任意  $n$  阶图  $G$ , 均有  $\gamma^-(G) \geq R(n)$ , 且此下界是不能改进的. 这也能导出在引理 3(1) 中所给出的下界.

事实上, 对任意  $n$  阶图  $G$ , 当  $n \geq 3$  时,  $s \geq 3$ , 注意到  $g(x) = \frac{(x-1)(4-s)}{2}$  为  $[3, +\infty)$  上的递减函

数, 且由  $\binom{s}{2} \leq n$  得知  $s \leq \frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}$ , 故有

$$\gamma^-(G) \geq R(n) \geq g(s) \geq g\left(\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}\right) = \sqrt{1+8n} - 1 - n.$$

## 参考文献:

- [1] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and P. J. Slater. Domination in graphs [M]. New York, 1998.
- [2] Zhongfu Zhang, Baogen Xu etc. A note on the lower bounds of signed domination numbers of a Graph [J]. Discrete Math. 1999, (195): 295~298.
- [3] Baogen Xu, On minus domination and signed domination in graphs [J]. 数学研究与评论, 2003, (4): 586~590
- [4] Baogen Xu, On signed edge domination numbers of graphs [J]. Discrete Math. 2001, (239): 179~189
- [5] J. H. Hattingh and E. Ungerer, The signed and minus  $k$ -subdomination numbers of comets [J]. Discrete Math., 1998, (183): 141~152.
- [6] E. J. Cockayne and C. M. Mynhardt, On a generalization of signed dominating function of graphs [J]. Ars. Combin. 1996, (43): 235~245.
- [7] Baogen Xu, E. J. Cockayne, T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, S. Zhou, Extremal Graphs for inequalities involving domination parameters [J]. Discrete Math. 2000, (216): 1~10.
- [8] F. 哈拉里, 图论 [M]. 上海: 上海科技出版社, 1980.

# On the Minimum Minus Domination Number for Graphs of Order $n$

XU Bao-Gen

(School of Natural Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

**Abstract:** Let  $R(n)$  be the minimum minus domination number for all graphs of order  $n$ . In this paper we Determine the exact of  $R(n)$  for every integer  $n \geq 3$ , that is,  $R(n) = \frac{(s-1)(4-s)}{2} + \min\left\{0, 2-n+\binom{s}{2}\right\}$ , where  $\binom{s}{2} \leq n < \binom{s+1}{2}$ .

**Key words:** minus dominating function; minus domination number; signed dominating function; signed domination number