文章编号:1005－0523(2005)02－0139－02

含 K_5 的 10 点 K 正则图的团覆盖数

万 丽[1,2]

(1.广州大学 数学与信息科学学院，广州 510405;2.中国地质大学 地球科学与资源学院,北京 100083)

摘要:首先自定义了点的可互换性,在此基础上证明了 10 点 k－正则图中最大团为 K_5,并对 k 的不同取值进行了讨论,得出了含有最大团 K_5 的 10 点 k－正则图的团覆盖数.

关 键 词:团覆盖数;相邻;正则图;可互换

中图分类号:O157.5 **文献标识码:**A

1 引 言

设图 $G=(V,E)$,结点集 $V'\neq\varnothing$,且 $V'\subset V$, $E(V')\subset E(V)$,则称图$(V',E(V'))$为图 G 的导出子图,记为 $G[V']$.若其导出子图为完全图则称此子图为图 G 的一个团,若此团有 n 个结点就称为 n－团,记为 K_n.若有一团集$\{K_n|n\in N\}$覆盖了图 G 的所有边,即 G 中每一条边至少属于一个 K_n 中,这时我们称集$\{K_n|n\in N\}$是图 G 的一个团覆盖,我们把图 G 的所有团覆盖的最小基数定义为图 G 的团覆盖数,用 $CC(G)$表示.

任意图的团覆盖与团划分数属 NP 完全问题[1][2].本文首先给出了点的可互换性定义,证明了 10 点 k－正则图最大团为 K_5,然后证明了当 k 取不同值时,含有最大团 K_5 的 10 点 k－正则图所对应的团覆盖数值.特别记 n 点k－正则图为 $G(k,n)$.

本文中,所讨论的图是指有限阶、无重边、无方向的简单图.除特别定义与说明外,文中的概念、术语及符号的意义均可参看文献[3].

1 主要结果和证明

定义[6] 在图 G 中,若存在 k 个点,这 k 个点中任意一点所相邻的点集相同,或此图为完全图,则称这 k 个点为可互换的点.若设 k 个点分别为 $v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_k}$,且是可互换点,则记为$[v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_k}]=N(v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_k})$

如顶点集 A 中任一点与 B 中的每一点相邻,则记为 $A\to B$.

又设 $V(G(k,10))=\{v_1,v_2,\cdots,v_{10}\}$

显然当 $k=9$ 时,图 $G(9,10)$为完全图,即 $CC(G(9,10))=1$,因此只须讨论 $k\leq 8$ 的情形.

引理 当 $k\leq 8$ 时,$G(k,10)$中最大团为 k_5

证明 如果 $G(k,10)$中最大团为 K_6,不妨设 $G[\{v_1,v_2,\cdots,v_6\}]\cong K_6$,那么正则图 $G(k,10)$的导出子图 $G[\{v_7,v_8,v_9,v_{10}\}]$应为 4 点 $15-k$ 条边,而 $k\leq 8$,所以 $G[\{v_7,v_8,v_9,v_{10}\}]$应为 4 点至少 7 条边,这是不可能的.故 $G(k,10)$中不存在 K_6,即 $G(k,10)$中最大团不是 K_6.

如果 $G(k,10)$中存在 K_5,不妨设 $G[\{v_1,v_2,\cdots,v_5\}]\cong K_5$,那么 $G[\{v_6,v_7,v_8,v_{10}\}]$应为 5 点 10

收稿日期:2005－01－12

作者简介:万 丽(1961－),女,湖北武汉人,副教授,博士生,主要研究方向:运筹学和数学地质.

条边的图,也即为另一个 K_5,因此 $G(k,10)$ 中有最大团为 K_5. 同时还可得知 $G(k,10)$ 中有 K_5 存在,则至少有两个 K_5,且这两个 K_5 是相互独立的.

定理 设正则图 $G(k,10)$ 中含有 K_5,则

1) 当 $k=4$ 时, $CC(G(4,10))=2$

2) 当 $k=5$ 时, $CC(G(5,10))=7$

3) 当 $k=6$ 时, $CC(G(6,10))=6$ 或 $CC(G(6,10))=7$

4) 当 $k=7$ 时, $CC(G(7,10))=6$ 或 $CC(G(7,10))=7$

5) 当 $k=8$ 时, $CC(G(8,10))=6$

此定理(1)至(5)的证明是类似的, 下面只证明其中的(1)至(3)

证明 由题意 $G(k,10)$ 中含有 K_5,不妨设 $G[\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}]\cong K_5^{(1)}$,则有

$G[\{v_6,v_7,v_8,v_9,v_{10}\}]\cong K_5^{(2)}$

(1)当 $k=4$ 时,因为 $G(4,10)$ 中最大团为 K_5,且 $G(4,10)$ 中含有 K_5,而 $|E(G(4,10))|=20$,所以 $\{K_5^{(1)},K_5^{(2)}\}$ 为 $G(4,10)$ 的一个团覆盖,由于 $K_5^{(1)}$ 与 $K_5^{(2)}$ 是相互独立的,故 $CC(G(4,10))=2$

(2)当 $k=5$ 时,因 $|E(G(5,10))|=25$,又 $|E(G(5,10))-E(K_5^{(1)}|\cup K_5^{(2)}|=5$,此时 $V_1=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ 中每一点只能与 $V_2=\{v_6,v_7,v_8,v_9,v_{10}\}$ 中一点相邻,由于 $[\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}]=N(\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\})$, $[\{v_6,v_7,v_8,v_9,v_{10}\}]=N(v_6,v_7,v_8,v_9,v_{10})$,在同构意义下不妨设 $v_i\rightarrow v_{i+5}$, $i=1,2,3,4,5$

因此 $\{K_5^{(1)},K_5^{(2)},v_1v_6,v_2v_7,v_3v_8,v_4v_9,v_5v_{10}\}$ 构成图 $G(5,10)$ 的一个团覆盖,即 $CC(G(5,10))\leq 7$,又在图 $G(5,10)$ 中边 $\{v_1v_6,v_2v_7,v_3v_8,v_4v_9,v_5v_{10},v_1v_2,v_6v_7\}$ 中任意两条边都不可能在同一个团中,所以 $CC(G(5,10)\geq 7$,故 $CC(G(5,10))=7$.

(3)当 $k=6$ 时,因 $|E(G(6,10))|=30$,又 $|E(G(6,10))-E(K_5^{(1)}\cup K_5^{(2)}|=10$,此时 $V_1=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ 中每一点必须与 $V_2=\{v_6,v_7,v_8,v_9,v_{10}\}$ 中两点相邻,在同构意义下只须考虑下列两种情况

情况 3.1 $V_1=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ 中任意两点都不同时与 $V_2=\{v_6,v_7,v_8,v_9,v_{10}\}$ 中二点相邻,不妨设 $v_i\rightarrow\{v_{10-i},v_{v11-i}\}$, $i=1,2,3,4,5$(注:当 $i=5$ 时, $v_{10-i}=v_{10}$).

$G[\{v_1,v_9,v_{10}\}]\cong G[\{v_2,v_8,v_9\}]\cong G[\{v_3,v_7,v_8\}]\cong G[\{v_4,v_6,v_7\}]\cong G[\{v_5,v_6,v_7\}]\cong K_3$ 分别记上述五个团为 $K_3^{(1)},K_3^{(2)},K_3^{(3)},K_3^{(4)},K_3^{(5)}$ 此时 $\{K_5^{(1)},K_5^{(2)},K_3^{(1)},K_3^{(2)},K_3^{(3)},K_3^{(4)},K_3^{(5)}\}$ 为图 $G(6,10)$ 的一个团覆盖,即 $CC(G(6,10)\leq 7$,又边 $\{v_1v_{10},v_2v_9,v_3v_8,v_4v_7,v_5v_6,v_2v_4,v_7v_9\}$ 中任意两条不可能在同一个团中,因此 $CC(G(6,10))\geq 7$,从而 $CC(G(6,10)=7$

情况 3.2 若 $V_1=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ 中存在两点同时与 $V_2=\{v_6,v_7,v_8,v_9,v_{10}\}$ 中二点相邻,则只能有两点同时与 V_2 中二点相邻. 不妨设 $\{v_1,v_2\}\rightarrow\{v_9,v_{10}\}$, $v_3\rightarrow\{v_7,v_8\}$, $v_4\rightarrow\{v_6,v_7\}$, $v_5\rightarrow\{v_6,v_8\}$ 此时在图 $G(6,10)$ 中 $G[\{v_1,v_2,v_9,v_{10}\}]\cong K_4$,记为 $K_4^{(1)}$, $G[\{v_3,v_7,v_8]\cong G[\{v_4,v_6,v_7\}]\cong G[\{v_5,v_6,v_8\}]\cong K_3$,分别记为 $K_3^{(1)},K_3^{(2)},K_3^{(3)}$,由此 $\{K_5^{(1)},K_5^{(2)},K_4^{(1)},K_3^{(1)},K_3^{(2)},K_3^{(3)}\}$ 为图 $G(6,10)$ 的一个团覆盖, $CC(G(6,10))\leq 6$,又边集

$\{v_2v_9,v_3v_8,v_4v_7,v_5v_6,v_2v_4,v_7v_9\}$ 中任意两条不可能在同一团中,因此 $CC(G(6,10)\geq 6$,从而 $CC(G(6,10)=6$

(4)当 $k=7$ 时,有 $CC(G(7,10))=6$ 或 $CC(G(7,10))=7$ 与(3)的证明类似,略去.

(5)当 $k=8$ 时,在同构意义下只有一种情况,即 $CC(G(8,10))=6$. 证明与前面也是类似的,略去.

参考文献:

[1] Bondy J A and Murty U SR. Graph Theory with Application [M]. The Macmillan Press LTD, 1976.

[2] Holyer. The NP-Completeness of some edge partition problem [J]. SIAM J. computer 1981, (10):713-717.

[3] Pullman N J. Clique Covering of graphs-a Survey[A]. Proceeding of the Xth Aaustralian Conference on Combinatorial Mathematics[C]. Adlaide, 1982.

[4] Pullman N J. Clique Coverings of graphs I: Clique partitions of regular graphs[J]. Utilitus Math. 1981, (19):177-205.

[5] 万 丽,徐建豪. n-太阳图的线图及全图的团覆盖数与团划分数[J]. 武汉工业大学学报, 1998, 20(2):116-118

[6] 万 丽,徐建豪. n 圈中辐图的覆盖数和团划分数[J]. 工科数学, 2001, (4):55-56.

(下转第 143 页)

[7] Chartrand G, Lesniak-Foster L. Graph and digraphs [M]. Ind. Edition, Wadsworth Brooks/Cole, Monterey, CA, 1986.

[8] Hansen P, Marcotte O. Graph coloring and application [M]. AMS providence, Rhode Island USA, 1999.

Adjacent Vertex-Distinguishing Edges Coloring of Crown Graph Gn, m

MA Gang[1], MA Ming[1,2], ZHANG Zhong-fu[1]

(1. College of Computer Science and Information Engineering, Northwest University for Nationalities, Lanzhou 730030; 2. School of mathematics and statistics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China)

Abstract: Define Crown graph $G_{n,m}$ as $V(G_{n,m})=\{u_i \mid i=1,2,\cdots,n\}\cup\{v_i \mid i=1,2,\cdots,n\}\bigcup_{i=1}^{n}\{u_{ij}\mid j=1,2,\cdots,m\}$, $E(G_{n,m})=\{u_1u_2, u_2u_3,\cdots,u_nu_1\}\cup\{v_1v_2,v_2v_3,\cdots,v_nv_1\}\cup\{u_iv_i\mid i=1,2,\cdots,n\}\bigcup_{i=1}^{n}\{u_iu_{ij}\mid j=1,2,\cdots,m\}\bigcup_{i=1}^{n}\{u_{ij}u_{i(j+1)}\mid j=1,2,\cdots,m-1\}$, $(n\geq 3, m\geq 1)$.

Key words: Graph; Crown graph; Adjacent Vertex-distinguishing Edge Coloring

---

(上接第140页)

The Clique Covering Numbers of the k-regular Graph on 10 Vertices Including K_5

WAN　Li[1,2]

(1. School of Mathematics and Information Sinence, Guangzhou University, Guangzhou, 510405; 2. School of the Earth Science and Land Resources, China University of Geology, Beijing 100083, China)

Abstract: It is proved that the maximum clique is K_5 in k-regular graph on 10 vertices, and the clique covering numbers including K_5 have been discussed, based on the interchangeability of vertices.

Key words: clique covering numbers; adjacent; regular; interchangeable.