

文章编号: 1005—0523(2005)02—0147—03

随机环境下的非线性时间序列模型的几何遍历性

王允艳, 俞 政

(中南大学 数学科学与计算技术学院, 湖南 长沙 410075)

摘要:将对随机环境下的非线性时间序列模型 $x_t = (\alpha_0 + \alpha_1 |x_{t-1}|^{r^1} + \dots + \alpha_p |x_{t-p}|^{r^p})^{1/r} \epsilon_t(z_t)$ 进行分析, 研究由其决定的迭代序列的几何遍历性.

关 键 词: 马氏链; 非线性时间序列; 随机环境; 伴随几何遍历

中图分类号: O211.62

文献标识码: A

1 模型的引入

一般地, 设 $(\Omega, \mathcal{H}, P_r)$ 是一个概率空间, p 为一正整数, R^p_+ 记 P 维正实数空间, 即

$R^p_+ = \{z: z = (z_1, z_2, \dots, z_p)^T \in R^p, \text{ 且 } z_i > 0, i = 1, 2, \dots, p\}$ (其中“ T ”表示向量或矩阵的转置), B_p^+ 为 R^p_+ 上的 Borel σ -代数.

令 $E = \{1, 2, \dots, e\}$ 令是一个有限集合, F 记 E 的所有子集生成的 σ 代数, $\{Z(t), t \geq 0\}$ 表示一个定义在 $(\Omega, \mathcal{H}, P_r)$ 上的不可约非周期的马氏链, 它的状态空间为 $(E, F); \{\epsilon_t(1)\}, \dots, \{\epsilon_t(e)\}$ 是 e 个 $i \cdot i \cdot d$ 的随机变量序列, 其中每一个都是定义在 $(\Omega, \mathcal{H}, P_r)$ 上, (R^p_+, B_p^+) 以为状态空间的. 以下, 令 $P_{ij} = Pr(Z_{t+1} = j | Z_t = i), t \geq 0, i, j \in E$.

定义 1 设
$$\begin{cases} x_t = h_t^{1/r} \epsilon_t(z_t) \\ h_t = \alpha_0 + \alpha_1 |x_{t-1}|^{r^1} + \dots + \alpha_p |x_{t-p}|^{r^p} \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\alpha_0 > 0, \alpha_i > 0, i = 1, 2, \dots, p; 0 < \beta \leq 1, r > 0$. 且有

- (i) 对 $\forall i \in E, \epsilon_t(i), t \geq 1$ 是 $i \cdot i \cdot d$ 的随机变量, 且满足: $E[\epsilon_t(i)] = 0, E|\epsilon_t(i)|^r = 1$;
(ii) $\{Z_t\}, \{\epsilon_t(1)\}, \dots, \{\epsilon_t(e)\}$ 相互独立且 $\forall i \in E, t \geq 0, Z_{t+1}, \epsilon_{t+1}(i)$, 均与 $\{X_s, s \leq t\}$ 独立.
则(1)定义的非线性时间序列模型为随机环境下的非线性时间序列模型.

2 主要结论

引理 1 在模型(1)中, 设对 $\forall i \in E, \{|\epsilon_t(i)|^r\}, t \geq 1$ 有处处为正的下半连续的密度函数 Φ_i , 则 $\{(|x_t|^r, z_t)\}$ 是不可约非周期的 Feller 链, 并且一切具有非零测度的相对紧集均为小集.

证明 不可约性和小集的证明与 Chan 和 Tong(1985)和[3]中的证明类似, 非周期性由[1]引理 4.1.6 可

收稿日期: 2004—10—18

作者简介: 王允艳(1981—), 女, 山东枣庄人, 研究生.

中国知网 <https://www.cnki.net>

得.

下面讨论模型(1)的几何遍历性. 首先讨论 $\beta=1$ 时的情况,

令 $y_t = |x_t|^r$, $e_t(z_t) = |\epsilon_t(z_t)|^r$, $Y_t = (y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-p+1})^\tau$, $B_t(Z_t) = (\alpha_0 e_t(z_t), 0, \dots, 0)^\tau$,

$$A_t(Z_t) = \begin{bmatrix} \alpha_1 e_t(z_t) & \cdots & \alpha_{p-1} e_t(z_t) & \cdots & \alpha_p e_t(z_t) \\ 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

则当 $\beta=1$ 时(1)可化为 $Y_t = A_t(Z_t)Y_{t-1} + B_t(Z_t)$ (2)

定义 2 设模型(2)有唯一的不变概率分布 F , 且对任何的初始状态 $Y_0 = y$, 由(2)迭代产生的 Y_t 的概率分布记为 F_t^α . 如果存在常数 $\rho: 0 < \rho < 1$, 使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho^{-t} \|F_t^\alpha - F\|_\tau = 0$, 则称模型(2)为伴随几何遍历的, 并称 $\{(Y_t, Z_t)\}$ 为其导出序列.

引理 2 模型(2)的导出序列 $\{(Y_t, Z_t)\}$ 是定义在 $(\Omega, \mathcal{h}, P_r)$ 上, 以 $(R_+^p \times E, B_p^+ \times F)$ 为状态空间的齐次马氏链.

证明 $\forall \Delta \times \{j\} \in B_p^+ \times F, (y, i)$ 及 $(y_s, i_s) \in R_+^p \times E (0 \leq s < t)$

$P_r(Y_{t+1} \in \Delta, Z_{t+1} = j | Y_t = y, Z_t = i, Y_s = y_s, Z_s = i_s, 0 \leq s < t)$

$= P_r(A_{t+1}(Z_{t+1})Y_t + B_{t+1}(Z_{t+1}) \in \Delta, Z_{t+1} = j | Y_t = y, Z_t = i, Y_s = y_s, Z_s = i_s, 0 \leq s < t)$

$= P_r(A_{t+1}(j)y + B_{t+1}(j) \in \Delta, Z_{t+1} = j | Z_t = i) = P_r(A_{t+1}(j)y + B_{t+1}(j) \in \Delta) P_r(Z_{t+1} = j | Z_t = i)$

另一方面, $P_r(Y_{t+1} \in \Delta, Z_{t+1} = j | Y_t = y, Z_t = i) = P_r(A_{t+1}(j)y + B_{t+1}(j) \in \Delta, Z_{t+1} = j | Z_t = i)$

$= P_r(A_{t+1}(j)y + B_{t+1}(j) \in \Delta) P_r(Z_{t+1} = j | Z_t = i)$

于是可知 $\{(Y_t, Z_t)\}$ 具有马氏性, 而由 $\epsilon_{t+1}(j), j \in E$ 的平稳性可知 $\{(Y_t, Z_t)\}$ 是齐次的.

注意到关于模型(1)的假设之一是: $\{Z_t\}$ 是不可约的, 从而可知, 对 (E, F) 上的任一测度 $\lambda, \{Z_t\}$ 是 λ -不可约的. 适当地选取一个测度, 仍以 λ 记之, 满足 $\forall i \in E, \lambda\{i\} > 0$ 于是可以导出一个定义在 $(R_+^p \times E, B_p^+ \times F)$ 上的测度 $\mu_p \times \lambda$, 这里 μ_p 为 (R_+^p, B_p^+) 上的 Lebesgue 测度, 使得 $\mu_p(A) > 0$ 蕴含 $\mu_p \times \lambda(A \times \{j\}) > 0, A \in B_p^+, i \in E$. 又由引理 1 可知:

引理 3 模型(2)的导出序列 $\{(Y_t, Z_t)\}$ 是 $\mu_p \times \lambda$ 不可约和非周期的, 并且若 A 为 R_+^p 中任一具有非零测度的相对紧集, 则 $\forall i \in E, A \times \{i\}$ 是一个 $\{(Y_t, Z_t)\}$ 的小集.

定理 1 在模型(2)中, 若有 $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p < 1$, 且 $\forall i \in E, \{|\epsilon_t(i)|^r\}, t \geq 1$ 有处处为正的下半连续的密度函数, 则其导出序列 $\{(Y_t, Z_t)\}$ 是几何遍历的, 而模型(2)本身是伴随几何遍历的.

证明 首先证明 $\{(Y_t, Z_t)\}$ 是几何遍历的: 由引理 1 及引理 2 知, 在定理给定的条件下, $\{(Y_t, Z_t)\}$ 是一个 $\mu_p \times \lambda$ 不可约和非周期的马氏链, 且对 R_+^p 中任一具有非零测度的相对紧集 A , 以及 $\forall i \in E, A \times \{i\}$ 是一个小集.

取 $g(y, i) = 1 + \|y\|_1 = 1 + \sum_{i=1}^p b_i |y_i|, y \in R_+^p$

$E[g(Y_{t+1}, Z_{t+1}) | (Y_t, Z_t) = (y, i)] = E[g(Y_1, Z_1) | (Y_0, Z_0) = (y, i)]$

$= \sum_{j \in E} p_{ij} E[1 + \|A_1(Z_1)Y_0 + B_1(Z_1)\|_1 | Z_1 = j, (Y_0, Z_0) = (y, i)]$

$= \sum_{j \in E} p_{ij} E[1 + \|A_1(j)y + B_1(j)\|_1] = 1 + \sum_{j \in E} p_{ij} E[\|A_1(j)y + B_1(j)\|_1]$

$\leq 1 + \sum_{j \in E} p_{ij} (E\|A_1(j)y\|_1 + E\|B_1(j)\|_1) \leq 1 + E(b_1 \alpha_0 |e_1(j)|) + E\{b_1 \sum_{i=1}^p \alpha_i e_i(j) |z_i| + \sum_{i=2}^p b_i |z_{i-1}|\}$

$\leq C + (\alpha_1 + \frac{b_2}{b_1}) b_1 |z_1| + \frac{b_1 \alpha_2 + b_3}{b_2} b_2 |z_2| + \dots + \frac{b_1 \alpha_{p-1} + b_p}{b_{p-1}} b_{p-1} |z_{p-1}| + \frac{b_1 \alpha_p}{b_p} b_p |z_p|$

$\leq C + \max_{1 \leq i \leq p} \frac{\alpha_i b_1 + b_{i+1}}{b_i} g(y, i) \leq C + \theta g(y, i) \quad (\text{其中 } \theta = \max_{1 \leq i \leq p} \frac{\alpha_i b_1 + b_{i+1}}{b_i})$

$\leq \theta g(y, i) - [(\rho - \theta) g(y, i) - C]$

中国知网 <https://www.cnki.net>

由①及 g 的定义, 存在正实数 K_1 使当 $\|y\|_1 \geq K_1$ 时, $(\rho - \theta)g(y, i) - C > 0$, 取 $K > K_1$, 并令 $B = \{(y,$

①

$i): \|y\|_1 \leq K, i \in E\}$, 则由①知: 存在常数 $C_1 > 0, C_2 > 0$ 使得

$$E[g(Y_{t+1}, Z_{t+1}) | (Y_t, Z_t) = (y, i)] \leq \rho g(y, i) - C_1, \forall (y, i) \notin B$$

$$E[g(Y_{t+1}, Z_{t+1}) | (Y_t, Z_t) = (y, i)] \leq C_2, \forall (y, i) \in B$$

故由[1]定理 4.1.12 知, $\{(Y_t, Z_t)\}$ 是几何遍历的.

下证(2)是伴随几何遍历的, 由于 $\{(Y_t, Z_t)\}$ 具有几何遍历性, 故由定义知: 存在 $(R^p_+ \times E, B^+_p \times F)$ 上的概率测度 π 及常数 $\rho: 0 < \rho < 1$, 使得 $(y, i) \in R^p_+ \times E, \lim_{n \rightarrow \infty} \rho^{-n} \|P_n\|((y, i), \cdot) - \pi(\cdot) \|_\tau = 0$ ②

在 (R^p_+, B^+_p) 上, 定义集合函数 π^* 如下: $\forall \Lambda \in B^+_p, \pi^*(\Lambda) = \pi(\Lambda \times E)$, 显然 π^* 是 (R^p_+, B^+_p) 上的概率测度. 设 $y \in R^p_+, \{Y_t\}$ 是以 $Y_0 = y$ 为初始值, 由(2)确定的迭代序列, 于是 $\forall \Lambda \in B^+_p$ 有

$$\begin{aligned} P_r(Y_t \in \Lambda | Y_0 = y) &= \sum_{j \in E} P_r(Y_t \in \Lambda, Z_t = j | Y_0 = y) \\ &= \sum_{j \in E} \sum_{i \in E} P_r\{Y_t \in \Lambda, Z_t = j | Y_0 = y, Z_0 = i\} P_r(Z_0 = i | Y_0 = y) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{且 } \pi^*(\Lambda) = \pi(\Lambda \times E) = \sum_{j \in E} \sum_{i \in E} \pi(\Lambda \times \{j\}) P_r(Z_0 = i | Y_0 = y) \quad (4)$$

$$\text{因 } E \text{ 是一个有限集合, 于是由 } (3)(4) \text{ 立得 } \lim_{n \rightarrow \infty} \rho^{-n} \|P_r(Y_t \in \Lambda | Y_0 = y) - \pi^*(\Lambda)\|_\tau = 0 \quad (5)$$

又由[2]中定理 1.4.1 的证明过程知: π 是 $\{(Y_t, Z_t)\}$ 的不变概率测度, 从而由 π^* 的定义易知 π^* 是 $\{Y_t\}$ 的不变概率测度, 且 π^* 的唯一性可由 π 的唯一性导出. 于是由 π^* 具有的性质及⑤知(2)是伴随几何遍历的.

下面考虑 $0 < \beta < 1$ 的情况: 令 $y_t = \ln|x_t|^r, e_t(z_t) = \ln|\epsilon_t(z_t)|^r$

$$\text{则(1)可变为: } y_t = \ln(\alpha_0 + \alpha_1 e^{\beta y_{t-1}} + \dots + \alpha_p e^{\beta y_{t-p}}) + e_t(z_t) \quad (3)$$

$$\text{令 } Y_t = (y_t, \dots, y_{t-p+1})^\tau, \xi_t(Z_t) = (e_t(z_t), 0, \dots, 0)^\tau, T(Y_t) = (\ln(\alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i e^{\beta y_{t+1-i}}, y_t, \dots, y_{t-p+2}))^\tau,$$

$$\text{则上式又可变形为: } Y_t = T(Y_{t-1}) + \xi_t(Z_t) \quad (4)$$

与 $\beta = 1$ 的情况类似可得: 模型(4)导出序列 $\{(Y_t, Z_t)\}$ 是一个定义在 (Ω, h, P_r) 上, 以 $(R^p_+ \times E, B^+_p \times F)$ 为状态空间的齐次马氏链, 且 $\{(Y_t, Z_t)\}$ 是 $\mu_p \times \lambda$ 不可约和非周期的, 并且若 A 为 R^p_+ 中任一具有非零测度的相对紧集, 则 $\forall i \in E, A \times \{i\}$ 是一个 $\{(Y_t, Z_t)\}$ 的小集.

定理 2 当 $0 < \beta < 1$ 时, 模型(4)的导出序列 $\{(Y_t, Z_t)\}$ 是几何遍历的, 从而(4)是伴随几何遍历的.

证明 先证 $\{(Y_t, Z_t)\}$ 的几何遍历性: 由引理 1 及引理 2 知, 在定理给定的条件下, $\{(Y_t, Z_t)\}$ 是一个 $\mu_p \times \lambda$ 不可约和非周期的马氏链, 且对 R^p_+ 中任一有非零测度的相对紧集 A , 以及 $\forall i \in E, A \times \{i\}$ 是一个小集.

$$\text{令 } g(y, i) = \max_{1 \leq j \leq p} |y_j| = \|y\|_\infty, y = (y_1, y_2, \dots, y_p)^\tau, \text{ 并令 } (W_t, Z_t) = (Y_{pt}, Z_{pt})$$

$$\text{则 } E[g(W_{t+1}, Z_{t+1}) | (W_t, Z_t) = (y, i)] = E[g(W_1, Z_1) | (W_0, Z_0) = (y, i)] = E[g(Y_p, Z_p) | (Y_0, Z_0) = (y, i)]$$

$$\text{又因为 } |\ln(\alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i e^{\beta y_i})| \leq \beta \max_{1 \leq i \leq p} |y_i| + C \quad (6)$$

$$\text{由(3)和⑥知 } |z_1| \leq e_1(z_1) + \beta \max\{|z_0| + \dots + |z_{1-p}| + C \leq |e_1(z_1)| + \beta g(Z_0, i) + C;$$

$$\text{依次类推, 有 } |z_p| \leq e_p(z_p) + C + \beta(|e_{p-1}(z_{p-1})| + C + \dots + \beta^{-1}(|e_1(z_1)| + C) + \beta g(Z_0, i)$$

$$\text{因此, } E[g(Y_p, Z_p) | (Y_0, Z_0) = (y, i)] = \sum_{j \in E} p_{ij}^p E[g(Y_p, Z_p) | Z_p = j, (Y_0, Z_0) = (y, i)]$$

$$= \sum_{j \in E} p_{ij}^p E[g(Y_p, j) | (Y_0, Z_0) = (y, i)] = \sum_{j \in E} p_{ij}^p E[\max\{|z_1|, \dots, |z_p|\} | (Y_0, Z_0) = (y, i)]$$

$$\leq E|e_p(z_p)| + C + \beta(E|e_{p-1}(z_{p-1})| + C) + \dots + \beta^{-1}(E|e_1(z_1)| + C) + \beta g(y, i)$$

$$(\text{令 } C' = E|e_p(z_p)| + C + \beta(E|e_{p-1}(z_{p-1})| + C) + \dots + \beta^{-1}(E|e_1(z_1)| + C) > 0)$$

$$= C' + \beta g(y, i) \leq \lambda g(y, i) - [(\lambda - \beta)g(y, i) - C'] \quad (7)$$

由⑦及 g 的定义, 存在正实数 K_1 使当 $\|y\|_\infty \geq K_1$ 时, $(\lambda - \beta)g(y, i) - C' > 0$, 取 $K > K_1$, 并令 $B = \{(y, i): \|y\|_\infty \leq K, i \in E\}$, 则由⑦知: 存在常数使得 $C_1 > 0, C_2 > 0$ 使得

故由[1]定理 4.1.12 知 $\{(W_t, Z_t)\} = \{(Y_{pt}, Z_{pt})\}$ 是几何遍历的, 所以由[1]定理 4.1.13, $\{(Y_t, Z_t)\}$ 是几何遍历的, 于是定理所述的前一部分得证. 与定理 1 中证明类似, 可得结论中后一部分的证明.

参考文献:

[1] 安鸿志, 陈敏. 非线性时间序列分析[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1998.

[2] 盛昭瀚, 王涛, 刘德林. 非线性时间序列模型的稳定性分析—遍历性理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 1993.

[3] 俞 政. 马氏化方法在时间序列和排队模型中的应用[D]. 长沙: 中南大学, 2003.

[4] Hongzhi An, Min Chen, Fuchun Huang. The geometric ergodicity and existence of moments for a class of non-linear time series model[J]. J. Statistics & Probability Letters. 1997, (31): 213~224.

[5] Tong, H. Nonlinear Time Series[C]. a Dynamical System Approach. Cambridge Oxford Univ. Press. 1990.

[6] Chan, K.S. and H. Tong, On use of the deterministic Lyapunov function for the ergodicity of stochastic difference equations[J]. Adv. Appl. Probab. 1985, (17) 666~678.

The Geometric Ergodicity of a Non-linear Time Series Model under the Random Environment

WANG Yun-yan, YU Zheng

(School of Math. Sciences and Technology, Changsha 410075, China)

Abstract: In this paper we consider the non-linear time series model under the random environment, $x_t = (\alpha_0 + \alpha_1 |x_{t-1}|^{r^{\beta}} + \dots + \alpha_p |x_{t-p}|^{r^{\beta}})^{1/r} \epsilon_t(z_t)$. We discuss the geometric ergodicity of the iterative sequence defined by this model.

Key words: Markov chains; non-linear time series; random environment; adjoint geometric ergodicity.