文章编号:1005－0523(2005)02－0151－02

Bland 规则的一点改进

廖宇波

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:用单纯形法求解线性规划问题时,可能出现循环现象.为此,R.G.Bland 在 1976 年提出了一个处理办法.本文对其作了一点改进,以使得迭代效率更高.

关 键 词:线性规划;单纯形法;Bland 规则
中图分类号:O221.1　　**文献标识码**:A

1 引 言

线性规划问题的单纯形方法是 1947 年由 G.B.Dantzig 首先提出,其方法简介如下:

设给定的标准形式线性规划问题为

$$\min s=cx \quad \begin{cases} Ax=b \\ x\geq 0 \end{cases},$$

$A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的秩为 m,又有 $n\geq m\geq 1$ 求解此问题的单纯形法的步骤归结如下:

第一步:对于一个已知的可行基 $B=(P_{j_1}, P_{j_2}, \cdots, P_{j_m})$,写出 B 对应的规范形式以及 B 对应的基础可行解 $x_B^{(0)}=B^{-1}b=(b_{10} \quad \cdots \quad b_{m0})^T$.

第二步:检查检验数.如果所有的检验数满足 $\lambda_j\leq 0, (j=1,2,\cdots n)$,则相应的基础可行解就 $x^{(0)}$ 是最优解,计算结束.否则转下一步.

第三步:如果有检验数 $\lambda_r>0$,而且 $B^{-1}p_r=(b_{1r}, b_{2r}, \cdots, b_{mr})^T\leq 0$.则问题无最优解,计算结束.否则转下一步.

第四步:如有检验数 $\lambda_r>0$,且 $(b_{1r}, b_{2r}, \cdots, b_{mr})^T$ 中有正数,则取 x_r 为进基变量(若有多个正检验数,为了提高迭代效率通常选取最大的检验数,这种方法称为取最大检验数规则),并求最小比值 $\min\left\{\frac{b_{i0}}{b_{ir}} \mid b_{ir}>0\right\}=\frac{B_{s0}}{b_{sr}}$,由此确定 x_{js} 为离基变量然后用 p_r 代替 p_{js},得到新基 $\bar{B}$,再转下一步.

第五步:求出新基 $\bar{B}$ 对应的规范形式以及 $\bar{B}$ 对应的基础可行解 $x_B^{(1)}=\bar{B}^{-1}b$.然后,以 $\bar{B}$ 代替 B,以 $x_B^{(1)}$ 代替 $x^{(0)}$,并且返回第二步.

对于非退化的线性规划问题,使用上述迭代中取最大检验数规则的单纯形法,经过有限步迭代,必能求得最优解或判定问题无最优解.但是对于退化的线性规划问题,就不宜用了,因为可能出现基的循环现象.1951 年,A.J.Hoffman 首先构造出一个在迭代中出现循环的例子.1955 年,E.M.L.Beale 构造了一个更简单的在迭代中出现循环的例子.[1].

为了避免出现"死循环",1976 年,R.G.Bland 给出了一种避免循环的办法.他证明:按如下两条规则去做,可以避免计算中的循环.[2]

规则 1　当有多个检验数是正数时,选对应变量中下标最小者作为进基变量.

规则 2　当有多行的比值 $\frac{b_{i0}}{b_{ir}}$ 同时达到最小比值

收稿日期:2004－11－07
作者简介:廖宇波(1977－),男,湖南岳阳人,现任教于基础学院,在职研究生.

时,选对应基变量中下标最小者为离基变量.

其中,确定离基变量的规则 2 和前面的规则一致;只是确定进基变量不是使用取最大检验数规则,而是使用规则 1. *Bland* 规则的优点是简便易行,但是,由于它只考虑最小下标,不考虑目标函数值下降的快慢,因此具体计算时,它的迭代次数一般要比取最大检验数规则要多.

2 Bland 规则的改进

定理 1 设线性规划问题有最优解,用单纯形法迭代到某步出现退化的基础可行解,但是还未达到最优,并且此退化的基础可行解只有一个基变量取 0 值.则这个退化的基础可行解在以后的迭代过程中(即使使用取最大检验数规则确定进基变量)必然不会再出现.

证明 首先假设该步对应的基为 $B=(p_{j1}, p_{j2}, \cdots, p_{jm})$,对应的基础可行解为 $x^{(0)}$,对应的单纯形表

$$=T(B)=\begin{bmatrix} c_B B^{-1} b & c_B B^{-1} A^{-c} \\ B^{-1} b & B^{-1} A \end{bmatrix}.$$

相应的规范形式为

$$\min s = s^{(0)} - \sum_{j\neq j1, j2\cdots jm} \lambda_i x_j$$

$$\begin{cases} x_{ji} + \sum_{j\neq j1, j2\cdots jm} \lambda_j x_j = b_{i0} & (i=1,2,\cdots m) \\ x_j \geq 0 & (j=1,2,\cdots m) \end{cases}$$

此时 $b_{i0}(i=1,2,\cdots,m)$ 中仅有一个取 0 值,不妨设 $b_{s0}=0$,其余 $b_{i0}>0$. 在以后的迭代过程中,由于目标函数值会下降,所以只要离基变量所在的行不是第行,会转移. 而且,由于迭代中目标值不会上升,$x^{(0)}$ 就不会再出现. 因此,如果结论不成立,则只可能是以下情形:在以后的迭代中,每次离基变量所在的行都是第行,因而每次的进基变量就是下一次的离基变量. 这种变量只可能在集合 $\{x_j \mid j=j_1, j_2 \cdots j_m\} \cup \{x_{jn}\}$ 中,由于其个数有限,如果出现循环,则必有其中某变量 x_q 离基后又进基. 设 x_q 作离基变量时对应的单纯形表为 $T(B_t)$,同时设该表中的进基变量为 x_r. 则有该表中 $b_{sq}^{(t)}=1$,且 $\lambda_q^{(t)}=0, b_{sr}^{(t)}>0, \lambda_r^{(t)}>0$

设 x_q 作进基变量时对应的单纯形表为 $T(B_{t+k})$,则应有 $\lambda_q^{(t+k)}>0$(因为此时还没有达到最优). 从 $T(B_t)$ 出发迭代得到 $T(B_{t+k})$. 则有

$$b_{sq}^{(t+1)}=\frac{b_{sq}^{(t)}}{b_{sr}^{(t)}}>0,\ \lambda_q^{(t+1)}-\lambda_r^{(t)} b_{sq}^{(t+1)}<\lambda_q^{(t)}=0$$

依此递推可得 $b_{sq}^{(t+k)}>0$, $\lambda_q^{(t+k)}<0$, 这与 $\lambda_q^{(t+k)}>0$ 矛盾. 故结论成立. 证毕.

当出现退化情形时,从定理 1 中我们可以得到:只要此退化的基础可行解只有一个基变量取 0 值,仍然可以使用取最大检验数规则而不会出现循环. 因此可以对 *Bland* 规则 1 进行修改,以提高迭代效率.

改进规则 1 当有多个检验数是正数时,若相应的基础可行解最多只有一个基变量取 0 值,则使用取最大检验数规则来确定进基变量;若相应的基础可行解有多于一个基变量取 0 值,则使用 *Bland* 规则 1 来确定进基变量.

3 结束语

长期的实际应用表明:使用取最大检验数规则迭代效率较高,但是会发生循环现象;而使用 *Bland* 规则虽然可避免循环,但是迭代效率低. 为了弥补两者各自的缺陷,本文提出了改进规则 1,而且从理论上证明了此处理办法既可以避免循环,又比 *Bland* 规则迭代效率要高. 因此,上述改进在教学和手工计算过程中有重要的意义.

参考文献:

[1] 唐焕文,秦学志. 实用最优化方法[M]. 大连理工大学出版社,2004.

[2] 张建中,许绍吉. 线性规划[M]. 科学出版社,1990.

A Improvement of the Bland Method

LIAO Yu-bo

(School of Natural Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Recurring phenomenon probably occurs when we use simplex method to solve linear programming problem and meet degeneration. In 1976, Bland came up with a method to avoid recurrence. In this paper I made a little improvement on it, making it less repeated than Bland method in theory and more easily realized in hand.

Key words: linear programming; simplex method; bland method