文章编号:1005－0523(2005)02－0153－02

局部对称共形平坦伪黎曼流形的2－调和类空子流形

吴泽九

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:讨论局部对称共形平坦伪黎曼流形的2－调和类空子流形,得到这类子流形成为极大的二个充分条件,推广了文[2]中的结论.

关　键　词:局部对称;共形平坦;2－调和;极大

中图分类号:O186　　**文献标识码**:A

设 N_p^{n+p} 是指标为 p 的 $n+p$ 维伪黎曼流形, M^n 为 n 维黎曼流形, $f: M\rightarrow N$ 是等距浸入.若 f 是2－调和映照[2],称 M 是的2－调和类空子流形.本文证明了以下2个定理.

定理A　设 M^n 是局部对称共形平坦伪黎曼流形 N_p^{n+p} 中具有平行平均曲率的 n 维2－调和类空子流形, S 表示 M^n 的第二基本形式模长的平方, R 与 r 分别表示 N_p^{n+p} 的 *Ricci* 曲率的上、下确界, K 表示 N_p^{n+p} 的数量曲率.若有下列之一成立

$$(1)\frac{K}{n+p-1}-2r\leq 0 \tag{1.1}$$

$$(2)\ S<\frac{n}{n+p-2}\left(\frac{K}{n+p-1}-2R\right) \tag{1.2}$$

则 M^n 是极大的.

定理B　设 M^n 是局部对称共形平坦Lorentz流形 N_1^{n+1} 的紧致2－调和类空超曲面,且 N_1^{n+1} 的 *Ricci* 曲率的上确界 $R<0$.若 M^n 的第二基本形式模长的平方 $S<-R$,则 M^n 是极大的.

当 $N_p^{n+p}=N_p^{n+p}(c)$ 时, $R=r=(n+p-1)c$, $K=(n+p)(n+p-1)c$,定理 A 与 B 分别推广了[2]中的推论3.2与定理4.1.

本文对各种的指标范围规定如下:$1\leq A, B, C, D, E\cdots\leq n+p$; $1\leq i, j, k, l, m\cdots\leq n$; $n+1\leq\alpha, \beta, \gamma\cdots\leq n+p$;不声明时,$\Sigma$ 表示对重复指标求和.在 N_p^{n+p} 上选取局部标准正交标架场 $\{e_A\}$,使得限制在 M^n 上,$\{e_i\}$ 与 M^n 相切.设 $\{\omega_A\}$ 是 $\{e_A\}$ 的对偶标架场,$\{\omega_{AB}\}$ 是 N_p^{n+p} 的联络形式.调整顺序后有 $ds^2=\Sigma\varepsilon_A(\omega_A)^2$,其中 $\varepsilon_A=\begin{cases}1 & 1\leq A\leq n\\ -1 & n+1\leq A\leq n+p\end{cases}$.将这些形式限制在 M^n 上,有

$$\omega_\alpha=0,\ \omega_{i\alpha}=\Sigma h_{ij}^\alpha\omega_j,\ h_{ij}^\alpha=h_{ji}^\alpha \tag{1.3}$$

$$\eta=-\Sigma h_{ij}^\alpha\omega_i\omega_j e_\alpha,\ h=-\frac{1}{n}\Sigma(\Sigma h_{ii}^\alpha)e_\alpha \tag{1.4}$$

$$R_{ijkl}=K_{ijkl}-\Sigma(h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha-h_{il}^\alpha h_{jk}^\alpha) \tag{1.5}$$

$$R_{\alpha\beta kl}=K_{\alpha\beta kl}+\Sigma(h_{ik}^\alpha h_{il}^\beta-h_{il}^\alpha h_{ik}^\beta) \tag{1.6}$$

其中 $\eta, h, R_{ijkl}, R_{\alpha\beta kl}$ 分别表示 M^n 的第二基本形式,平均曲率向量,曲率张量分量和法曲率张量分量.定义.$S=\|\eta\|^2$, $H=\|h\|$.若 $H=0$,称 M^n 为极大的.跟随[3],定义 h_{ijk}^α 及 h_{ijkl}^α 分别为 h_{ij}^α 的共变导数,则有

$$h_{ijk}^\alpha-h_{ikj}^\alpha=-K_{\alpha ijk} \tag{1.7}$$

$$h_{ijkl}^\alpha-h_{ijlk}^\alpha=\Sigma h_{mi}^\alpha R_{mjkl}+\Sigma h_{mj}^\alpha R_{mikl}+\Sigma h_{ij}^\beta R_{\alpha\beta kl} \tag{1.8}$$

将 $K_{\alpha ijk}$ 看作是 $T^\perp M\otimes T^* M\otimes T^* M\otimes T^* M$ 的截面的分量,定义 $K_{\alpha ijkl}$ 为它的共变导数的分量:

收稿日期:2004－11－08
作者简介:吴泽九(1976－),男,江西会昌,讲师.

$\sum K_{\alpha ijkl}\omega_l = dK_{\alpha ijk} - \sum K_{\alpha mjk}\omega_{mi} - \sum K_{\alpha imk}\omega_{mj} - \sum K_{\alpha ijm}\omega_{mk} + \sum K_{\beta ijk}\omega_{\beta\alpha}$ (1.9)

K_{ABCD}的共变导数$K_{ABCD,E}$,限制在M^n上有

$K_{\alpha ijk,l} = K_{\alpha ijkl} + \sum K_{\alpha\beta jk}h_{il}^{\beta} + \sum K_{\alpha i\beta k}h_{jl}^{\beta} + \sum K_{\alpha ij\beta}h_{kl}^{\beta} + \sum K_{mijk}h_{ml}^{\alpha}$ (1.10)

N_p^{n+p}为局部对称的,即

$K_{ABCE,E} = 0$ (1.11)

N_p^{n+p}是共形平坦的,所以

$$K_{ABCD} = \frac{1}{n+p-2}(\varepsilon_A\delta_{AC}K_{BD} - \varepsilon_A\delta_{AD}K_{BC} + \varepsilon_B\delta_{BD}K_{AC} - \varepsilon_B\delta_{BC}K_{AD}) - \frac{K}{(n+p-2)(n+p-1)}\varepsilon_A\varepsilon_B(\delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{BC}) \quad (1.12)$$

其中$K_{AC} = \sum\varepsilon_B K_{ABCB}$是*Ricci*张量的分量,$K = \sum\varepsilon_A K_{AA}$是数量曲率.由(1.11),$K$是常数.

为了证明定理,需要下面引理

引理[2] M^n为N_p^{n+p}的2—调和类空子流形的充要条件为

$\sum(2h_{ijk}^{\beta}h_{kl}^{\beta} + h_{klk}^{\beta}h_{jj}^{\beta} - h_{jj}^{\beta}K_{\beta kkl}) = 0, \forall l$ (1.13)

$\sum(h_{jjkk}^{\alpha} + h_{jj}^{\beta}h_{kl}^{\beta}h_{lk}^{\alpha} + h_{jj}^{\beta}K_{\alpha kk\beta}) = 0, \forall \alpha$ (1.14)

定理A的证明 由假设,$\sum h_{jjk}^{\alpha} = 0$,故(1.14)为

$\sum h_{jj}^{\beta}h_{kl}^{\beta}h_{kl}^{\alpha} + \sum h_{jj}^{\beta}K_{\alpha kk\beta} = 0, \forall \alpha$ (1.15)

假定$H\neq 0$,选取e_{n+1}平行于h,使得$\sum h_{ii}^{\alpha} = 0 (\alpha > n+1)$,$\sum h_{ii}^{n+1} = nH$

则(1.15)化为

$\sum h_{jj}^{n+1}h_{kl}^{n+1}h_{kl}^{\alpha} + \sum h_{jj}^{n+1}K_{\alpha kkn+1} = 0 (\alpha > n+1)$ (1.16)

$\sum(h_{kl}^{n+1})^2 + \sum K_{n+1kkn+1} = 0$ (1.17)

由(1.17)和(1.12)有

$$\sum(h_{kl}^{n+1})^2 = \frac{1}{n+p-2}\left[\frac{nk}{n+p-1} + nK_{n+1n+1} - \sum K_{ii}\right] \quad (1.18)$$

所以

$$\sum(h_{kl}^{n+1})^2 \leq \frac{n}{n+p-2}\left(\frac{K}{n+p-1} - 2r\right) \quad (1.19)$$

(1)若(1.1)成立,则(1.19)推出$H_{kl}^{n+1} = 0$,与假设$H\neq 0$矛盾!

(2)若(1.2)成立,注意到$K_{n+1n+1} \geq -R$,$K_{ii} \leq R$,则

$$\sum(h_{kl}^{n+1})^2 \leq S < \frac{n}{n+p-2}\left(\frac{K}{n+p-1} - 2R\right) \leq \frac{1}{n+p-2}\left(\frac{nK}{n+p-1} + nK_{n+1n+1} - \sum K_{ii}\right)$$

与(1.18)矛盾.定理A得证.

定理B的证明:现在M^n是超曲面,$\alpha = \beta = n+1$.由(1.14)有

$\triangle H = H(K_{n+1n+1} - S)$

所以

$\frac{1}{2}\triangle H^2 = |\nabla H|^2 + H^2(K_{n+1n+1} - S)$ (1.20)

由假设得

$K_{n+1n+1} - S \geq -R - S > 0$

因此(1.20)右端非负,H^2是下调和函数.由M^n紧致,故(1.20)右端为0,从而$H = 0$.

参考文献:

[1] 姜国英,Riemann流形间的2-调和等距浸入[J].数学年刊,1986,(7A):130-144.

[2] 欧阳崇珍,伪黎曼空间型的2-调和类空子流形[J].数学年刊,2000,21A(6):649-654.

[3] Ishihara T., Maximal spacelike submanifolds of a pseudo-Riemannian Space of constant curvature[J]. Michigan Math J. 1988,35(3):345-352.

2-Harmonic Spacelike Submanifolds in a Locally Symmetric and Conformally Flat Pseudo-Riemannian Manifold

WU Ze-jiu

(School of Natural Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper, we discuss the 2-harmonic spacelike submanifolds in a locally symmetric and conformally flat pseudo-riemannian manifold and get two sufficient conditions under which M^n turns into a maximal submanifold, and the results in [2] are improved.

Key words: locally symmetric; conformally flat; 2-harmonic; maximal