文章编号:1005－0523(2005)04－0007－03

一类非线性梁在随机载荷作用下的弯曲振动(II)

包忠有

(华东交通大学 土木建筑学院,江西 南昌,330013)

摘要:非线性工程结构对随机载荷的动力响应分析是当前工程界十分关心的问题.本文利用Karman－Howarth在各向同性湍流研究中提出的方法讨论了一类非线性等直梁在随机载荷作用下的弯曲振动,给出了一种用于结构动力响应分析的简单而衫的近似方法.

关　键　词:非线性;随机振动;弯曲振动

中图分类号:TU991.22　　　　**文献标识码**:A

1　前　言

文中应用各向同性湍流的统计理论[1][2] Karman－Howath方法研究了连续系统的非线性随机振动.结合一类非线性等直梁在随机载荷作用下的弯曲振动,提出了一种适用于梁的动力响应分析的近似方法.

2　随机分布载荷

考虑一简支的非线性等直梁,如图1所示,其动力特性可用非线性偏微分方程来描述

$$A\rho\frac{\partial^2 Y(x,t)}{\partial t^2}+C\frac{\partial Y(x,t)}{\partial t}+EI\frac{\partial^4 Y(x,t)}{\partial X^4}+\varepsilon\{\alpha_1\frac{\partial^4 Y(x,t)}{\partial x^4}(\frac{Y(x,t)}{\partial x})^2+\alpha_2\frac{\partial^3 Y(x,t)}{\partial x^3}\frac{\partial^2 Y(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial Y(x,t)}{\partial x}+\alpha_3(\frac{\alpha^2 Y(x,t)}{\alpha x^2})^3\}=F(x,t) \tag{1}$$

式中$Y(x,t)$表示梁的横向挠度响应,A是梁的横截面积,ρ是梁的密度,C是阻尼系数,E是弹性模量,I是截面惯性矩,而$F(x,t)$则表示随机分布载荷.方程(1)中的非线性项是由于考虑挠度曲率的非线性而引起的,这里我们仅考虑了曲率展开式的前两项.方程(1)中ε是一个反映非线性程度的小参数;$|\varepsilon|<<1$,而α_1,α_2和α_3是已知的负常数.

一般随机分布载荷$F(x,t)$是一两参数的随机函数,本文仅限于讨论随机分布载荷只是时间t的随机函数(随机过程)的情况,随机分布载荷可以表示为[3]

$$F(x,t)=P(x)f(t) \tag{2}$$

式中$p(x)$是一确定性的空间函数,而$f(t)$则是一具有零均值的平衡随机过程.

随机分布载荷$F(x,t)$的自相关函数能够表示为

$$K_F(x^1,x^{11},\tau)=E[F(x^1,t_1)F(x^{11},t_2)]=p(x^1)p(x^{11})E[f(t_1)f(t_2)]=p(x^1)p(x^{11})\Gamma_t(\tau) \tag{3}$$

式中$\Gamma_F(\tau)$表示平衡随机过程$f(t)$的自相关函数,$E[\cdot]$表示数学期望算子,而$\tau(t_2-t_1)$.因为f是平衡随机过程,所以由著名的Wiener-Khintchine公式,

收稿日期:2005－01－27
作者简介:包忠有(1950－),江西广丰人,副教授.

我们有

$$\Gamma_f(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_f(\omega)\exp(j\omega\tau)\,d\omega \qquad (4)$$

这里 $S_f(\omega)$ 表示过程 $f(\tau)$ 的功率谱密度函数

$$K_F(x^1,x^{11},\tau)=p(x^1)p(x^{11})\int_{-\infty}^{\infty}S_f(\omega)\exp(j\omega\tau)\,d\omega \qquad (5)$$

令

$$K_F(x^1,x^{11},\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_F(x^1,x^{11},\omega)\exp(j\omega\tau)\,d\omega \qquad (6)$$

分布载荷 F 的功率谱密度函数表示为

$$S_F(x^1,x^{11},\omega)\,p(x^1)\,p(x^{11})\,S_f(\omega) \qquad (7)$$

在(5)式中令 $\tau=0$,得到分布载荷 F 的方差函数

$$\sigma_F^2(x^1,x^{11})=K_F(x^1,x^{11},o)$$

$$p(x^1)p(x^{11})\int_{-\infty}^{\infty}S_f(\omega)\,d\omega=p(x^1)p(x^{11})\sigma_f^2 \qquad (8)$$

式中 σ_f^2 表示过程f 的方差.

如果随机载荷 F 为一集中载荷,那么这时可用 Dirac 的一函数表示为[4]

$$F(x,t,s)=\delta(s-x)pf(t)$$

如图 2 所示,s 表示集中载荷在梁上的位置座标,P 为集中载荷的大小,$f(t)$ 为具有零均值的平稳随机过程.

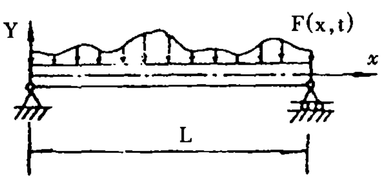

图 1

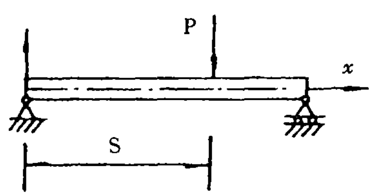

图 2

将 $p(x^1)p(x^{11})$ 改写为 $\delta(s-x^1)\delta(s-x^{11})P^2$ 即可,例如

$$K_F(x^1,x^{11},\tau,s)=\delta[\mathrm{s}-\mathrm{x}^1)\delta(s-x^{11})p^2\Gamma_f(\tau) \qquad (10)$$

$$S_F(x^1,x^{11},\tau,s)=\delta[\mathrm{s}-\mathrm{x}^1)\delta(s-x^{11})p^2S_f(\omega) \qquad (11)$$

$$\sigma_F^2(x^1,x^{11},s)=\delta[\mathrm{s}-\mathrm{x}^1)\delta(s-x^{11})p^2\sigma_F^2 \qquad (12)$$

3 分布载荷作用下的挠度响应

因为在随机集中载荷作用下,梁的随机挠度响应 $y(t;s)$ 的自相关函数 $\Gamma_t(\tau,s)$ 所满足的微分方程是线性的,所以解的叠加原理成立.因而在随机分布载荷 * 的作用下,梁的随机挠度响应 $y(t)$ 的自相关函数 $\Gamma_y(\tau)$,可以看成是无穷个随机集中载荷p(s)dsf(t)作用下梁的随机挠度响应$y(t;s)$的自相关函数 $\Gamma_y(\tau,s)$ 的叠加.在随机分布荷载作用下,梁的随机挠度响应 $y(t;s)$ 的自相关函数

$$\Gamma_y(\tau,s)=B\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p^2(s0\,dsS_f(\omega)}{\omega^4-T(\omega^2+R(s)}\exp(j\omega\tau)\,d\omega \qquad (13)$$

此时梁的随机挠度响应 $y(t)$ 的自相关函数为:

$$\Gamma_y(\tau)=B\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)S_f(\omega)\exp(j\omega\tau)\,d\omega \qquad (14)$$

式中

$$H(\omega)=\int_0^L\frac{Lp^2(s)\,ds}{\omega^4-T(s)\omega^2+R(s)} \qquad (15)$$

由 Wiener-Khintchine 公式,随机挠度响应 $y(t)$ 的功率谱密度函数为:

$$S_y(\omega)=BH9\,\omega)S_f(\omega) \qquad (16)$$

在随机分布载荷的情况下,梁的挠度响应为:

$$Y(x,t)=y(t)\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x) \qquad (17)$$

随机分布载荷作用下梁的挠度响应 $Y(x,t)$ 的自相关函数、功率谱密度函数和方差函数为:

$$\Gamma_Y(x^1,x^{11},\tau)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x^1)\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x^{11})$$

$$B\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)S_f(\omega)\exp(j\omega\tau)\,d\omega \qquad (18)$$

$$S_y(x^1,x^{11},\tau)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x^1)\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x^{11})BH(\omega)S_f(\omega) \qquad (19)$$

$$\sigma_Y^2(x)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x^2)B\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)S_f(\omega)\,d\omega \qquad (20)$$

4 弯矩响应的功率谱密度函数

弯矩响应 $M(x,t)$ 与挠度响应 $Y(x,t)$ 之间有如下关系;

$$M(x,t)=EI\frac{\partial^2}{\partial x^2}Y(x,t) \qquad (21)$$

将(42)式代入(46)式,可以得到

$$M(x,t)=EIy(t)\sum_{i=1}^{n}\frac{d^2}{dx^2}\varphi_i(x) \qquad (22)$$

弯矩响应 $M(x,t)$ 的自相关函数为:

$$\Gamma_M(x^1,x^{11},\tau)=E[\mathrm{M}(\mathrm{x}^1,t_1)M(x^{11},t_2)]$$

$$= E^2 I^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{d^2}{dx^2} \varphi_i(x^1) \sum_{i=1}^{n} \frac{d^2}{dx^2} \varphi_i(x^{11}) \Gamma_y(\tau) \quad (23)$$

$$\Gamma_M(x^1, x^{11}, \tau) == E^2 I^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{d^2}{dx^2} \varphi_i(x^1) \sum_{i=1}^{n} \frac{d^2}{dx^2} \varphi_i(x^{11}) B \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) S_f(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega \quad (24)$$

弯矩响应 $M(x, t)$ 的功率谱密度函数为：

$$S_M(x^1, x^{11}, \omega) == E^2 I^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{d^2}{dx^2} \varphi_i(x^1) \sum_{i=1}^{n} \frac{d^2}{dx^2} \varphi_i(x^{11}) BH(\omega) S_f(\omega) \quad (25)$$

弯矩响应 $M(x, t)$ 的方差函数为：

$$\sigma_M^2 = E^2 I^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{d^2}{dx^2} \varphi_i(x)^2 B \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) S_f(\omega) d\omega \quad (26)$$

5　例

作为例子我们考虑随机分布载荷为均匀分布的情况，即

$$F(x, t) = F(t) = q \cdot f(t) \quad (27)$$

式中 q 为一常数，而 $f(t)$ 为理想白噪声，其功率谱密度为 $S_0 = Cons$.

如果我们只考虑一阶固有振型，即

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) &= Sin \frac{\pi}{L} x \\ \omega_1 &= \frac{\pi}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{A\rho}} \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

从而计算出

$$V(s) = \pi^4 / L^4$$
$$U(s) = \frac{\pi^6}{L^6} \{ (\alpha_1 + \alpha_2) Cos^2 \frac{\pi}{L} S - \alpha_3 \sin^2 \frac{\pi}{L} s \quad (29)$$

$$T(s) = 2\omega_1^2 - c^2 / A^2 \rho^2 + \omega_1^3 (W(s)$$
$$R(s) = \omega_1^4 + \omega_1^5 W(s) \quad (30)$$

式中

$$W(s) = \varepsilon \frac{6 \sigma_y^2(s)}{EI} \sqrt{\frac{A\rho I}{EI}}$$
$$\{ (\alpha_1 + \alpha_2) \mathrm{Cos}^2 \frac{\pi}{L} s - \alpha_3 \sin^2 \frac{\pi}{L} s \} \quad (31)$$

我们将梁跨度 L 分为 n 个单元，每个单元长 $\Delta s = S_{i+1} - S_{i-1}$. 在每个单元的中点 $S_i = (S_{i+1} + S_{i-1})/2$ 处作用有集中载荷 $q \cdot f(t) \Delta S$. 计算出

$$\sigma_y^2(s_i) = Bq^2 \Delta s^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_0 d\omega}{\omega^4 - T(s_i)\omega^2 + R(s_i)} \quad (32)$$

$$\sigma_y^2(s_i) = Bq^2 \Delta s^2 \frac{S_0}{\sqrt{R(s_i)} \sqrt{2\sqrt{R(s_i)} - T(s_i)}} \quad (33)$$

$$H(\omega) = \int_0^L \frac{q^2 L ds}{\omega^4 - T(s)\omega^2 + Rs} \quad (34)$$

于是在局部随机均匀随机载荷作用下，梁的挠度响应的自相关函数、功率谱密度和方差为：

$$\Gamma_Y(x, t) = BS_0 S \sin^2(\frac{\pi}{L} x) \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega \quad (35)$$

$$S_Y(x, \omega) = BS_0 \sin^2(\frac{\pi}{L} x) \cdot H(\omega) \quad (36)$$

参考文献：

[1] Von Karman，TH. And Howarth，L. On the Statistical Theory of Lsotropic Turbulence，Proc，Roy，Soc，A164，1938.
[2] Hinze，J. O. Turbulence，McGraw-Hill，1959.
[3] Nigam.随机振动概论[M].上海：上海交大出版社，1985.
[4] 甘幼琛，等.随机振动的基本理论与应用[M].长沙：湖南科技出版社，1982.

Flexural Vibration of Non-linear Beam with the Random Load (II)

BAO Zhong-you

(School of Civil and Arc.，East China Jiaotong Univ.，Nanchang 330013，China)

Abstract: The analysis of dynamic repose by non-linear engineering structure to random load receives much condemn in the current engineering circle. Through the method ever used by Karman-Howarth in research of the like turbulence in all direction，the thesis explores the flexural vibrations of a kind of non-linear straight beam under the random load，and presents a simple and practical approximate method adopted in structural dynamic response analysis.

Key words: random; load; flexural vibration