文章编号:1005-0523(2005)04-0146-03

两类图的符号星控制数

徐保根

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:文[1~2]中引入了图的符号星控制概念,并确定了完全图的符号星控制数.本文确定了所有的轮图和完全二部图的符号星控制数.

关 键 词:轮图;完全二部图;符号星控制函数;符号星控制数

中图分类号:O157.5 **文献标识码:**A

1 引 言

本文所指的图均为无向简单图,文中未说明的符号和术语同于文献[1、3].

对于一个图 $G=(V,E)$, $v\in$ V,则 v 点在 G 中的的边邻域定义为 $E_G(v)=\{uv\in \mathrm{E}\mid \mathrm{u}\in \mathrm{V}\}$.

近几年来,图的控制理论研究的内容越来越广泛,各类控制概念相继产生且研究成果不断丰富.然而,绝大多数均属于图的点控制.在文[4]中我们定义了图的符号边控制概念并获得了较多的研究成果,在文[1~2]中我们又引入了图的另一种边控制概念,即符号星控制概念如下:

定义 1 [1~2] 设 G=(V,E) 是一个没有孤立顶点的图,一个函数 $f:E\rightarrow\{+1,-1\}$ 如果满足 $\sum\limits_{e\in E(v)}f(e)\geqslant 1$ 对一切 $v\in$ V(G) 成立,则称 f 为图 G 的一个符号星控制函数.图 G 的符号星控制数定义为 $\gamma'_{ss}(G)=\min\{\sum\limits_{e\in E(G)}f(e)\mid f$ 为 G 的符号星控制函数$\}$.对于空图 $\overline{K_n}$,则定义 $\gamma'_{SS}(\overline{K_n})=0$.

为了方便,如果 f 为图 G 的一个符号星控制函数,则称满足 $f(e)=1$ 的边 e 为f 下的 $+1$ 边;同样称满足 $f(e)=-1$ 的边 e 为下的 -1 边.

由上述定义不难看出:

引理 2 (1) 对于任意两个点不相交的图 G_1 和 G_2,则有 $\gamma'_{ss}(G_1\cup G_2)=\gamma'_{ss}(G_1)+\gamma'_{ss}(G_2)$

(2) 对于任意图 G,均有 $\gamma'_{ss}(G)\equiv 0(\mathrm{mod}\ |E(G)|)$

对于 n 阶图 G,文[1~2]中给出了其符号星控制函数的界限如下:

引理 3 [1~2] 对任意 n 阶图 G(n$\geqslant$4),均有 $2n-4\geqslant\gamma'_{ss}(G)\geqslant[\frac{n}{2}]$.

一个长度为偶数的圈称为偶圈.如果一个二部图的各项点的度均为偶数,则这个二部图称为偶度二部图.

引理 4 每个偶度二部图的边可分拆成若干偶圈之并.

证明 设 G 为任意一个偶度二部图,对 $m=|E(G)|$ 用归纳法:

当 $m=0$ 时引理显然成立.假若 $m\geqslant 1$ 且引理对于边数 $\leqslant$ m-1 的所有偶度二部图成立.现考虑一个边数为 m 的偶度二部图 G,显然 G 不为树或森林,故 G 中必有偶圈,在 G 中去掉一个偶圈(的边)得到一个图 G_1,显然 G_1 为一个偶度二部图,其边数 $\leqslant$ m-1.由归纳假设 G_1 的边可分拆成若干偶圈之

收稿日期:2005-04-01

基金项目:江西省自然基金资助课题(0311047)

作者简介:徐保根(1963-),男,江西南昌人,教授.

中国知网 https://www.cnki.net

并,从而图 G 的边也可分拆成若干偶圈之并(比 G_1 多分拆一个偶圈,引理 4 证毕.

2　主要结果

定理 5　对于 $n+1$ 阶轮图 $W_{n+1}(n\geqslant 3)$,则有 $\gamma'_{ss}(W_{n+1})=2[\frac{n}{4}]+2$

证明　当 $n=3$ 时,不难验证 $\gamma'_{ss}(W_4)=2=2[\frac{3}{4}]+2$,定理成立.

下设 $n\geqslant 4$,由引理 3 知 $\gamma'_{ss}(W_{n+1})\geqslant[\frac{n+1}{2}]\geqslant\frac{n+1}{2}\geqslant\frac{n}{2}>2[\frac{n}{4}]$,即 $\gamma'_{ss}(W_{n+1})>2[\frac{n}{4}]$,注意到 $\gamma'_{ss}(W_{n+1})$ 为整数,且由引理 2(2) 知其为偶数,从而 $\gamma'_{ss}(W_{n+1})\geqslant 2[\frac{n}{4}]+2$. 下面我们只需要定义 $W_{n+1}=(V,E)(n\geqslant 4)$ 的一个符号星控制函数 f,使得

$$\sum_{e\in E}f(e)=2[\frac{n}{4}]+2 \tag{1}$$

记 $V=V(W_{n+1})=\{u,v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n\}$,其中 u 为 W_{n+1} 的中心点,

$$E=E(W_{n+1})=\{w_i\mid 1\leqslant i\leqslant n\}\cup\{v_jv_{j+1}\mid 1\leqslant j\leqslant n-1\}\cup\{v_1v_n\}.$$

为了方便,若 t 为小于 n 的正整数,则用 $P[v_t\to v_n]$ 表示 W_{n+1} 中的这条长为 $n-t$ 的道路 $P=(v_tv_{t+1}v_{t+2}\cdots v_n)$.

情况 1　当 $n=0$(mod4 时;令 $n=4k$,此时 $|E|=8k$. 定义 W_{n+1} 的一个符号星控制函数 f 如下:

令　$f(w_i)=-1(1\leqslant 2k-1)$;

$f(w_i)=1(2k\leqslant i\leqslant 4k)$;

$f(v_jv_{j+1})=f(v_1v_n)=1(1\leqslant j\leqslant 2k-1)$;

其余边组成一条道路 $P=P[v_{2k}\to v_n]$,在道路中 P 取 k 条独立边组成集 M,P 上其余 k 条边组成集 M_1. 当 $e\in M$ 时定义 $f(e)=-1$;当 $e\in M_1$ 时定义 $f(e)=1$.

不难验证:上述定义的 f 为 W_{n+1} 的一个符号星控制函数,且在 f 下 W_{n+1} 中共有 $2k-1+k=3k-1$ 条标号为 -1 的边,从而共有 $5k+1$ 条 $+1$ 边,$\sum_{e\in E}f(e)=5k+1-(3k-1)=2k+2=2[\frac{n}{4}]+2$,即(1) 式成立.

情况 2　当 $n\equiv 1$(mod4) 时;令 $n=4k+1$,此时 $|E|=8k+2$. 在道路 $P=P[v_{2k+1}\to v_n]$ 中取 k 条独立边组成集 M,当 $e\in M$ 时定义 $f(e)=-1$;且定义 $f(w_i)=-1(1\leqslant i\leqslant 2k)$. 对于 W_{n+1} 中其余每条边 e,均定义 $f(e)=1$. 同样地不难验证:f 为 W_{n+1} 的一个符号星控制函数,且在 f 下 W_{n+1} 中共有 $2k+k=3k$ 条标号为 -1 的边,从而共有 $5k+2$ 条 $+1$ 边,即有

$$\sum_{e\in E}f(e)=5k+2-3k=2k+2=2[\frac{n}{4}]+2,$$

故(1) 式成立.

情况 3　当 $n\equiv 2$(mod4) 时;令 $n=4k+2$,此时 $|E|=8k+4$. 与情况 2 类似地定义 $f(w_i)=-1(1\leqslant i\leqslant 2k)$,注意到此时 $n=4k+2$,在 $P=P[v_{2k+1}\to v_n]$ 中可取到 $k+1$ 条独立边组成集 M,当 $e\in M$ 时定义 $f(e)=-1$. 对于 W_{n+1} 中其余每条边 e,均定义 $f(e)=1$. $\sum_{e\in E}f(e)=5k+3-(3k+1)=2k+2=2[\frac{n}{4}]+2$,故(1) 式成立.

情况 4　当 $n\equiv 3$(mod4) 时;令 $n=4k+3$,此时 $|E|=8k+6$.

定义,$f(w_i)=-1(1\leqslant i\leqslant 2k+1)$,在 $P=P[v_{2k+2}\to v_n]$ 中可取到 $k+1$ 条独立边组成集 M,当 $e\in M$ 时定义 $f(e)=-1$. 对于 W_{n+1} 中其余每条边 e,均定义 $f(e)=1$. $\sum_{e\in E}f(e)=5k+4-(3k+2)=2k+2=2[\frac{n}{4}]+2$,故(1) 式成立.

综合上述,定义了 W_{n+1} 的一个符号星控制函数 f,使得(1) 式成立. 定理 5 证毕.

定理 6　设 m 和 n 均为正整数且 $m\geqslant n\geqslant 1$,则

$$\gamma'_{ss}(K_{m,n})=\begin{cases}2m & \text{当 } n \text{ 为偶数}\\ m & \text{当 } n \text{ 和 } m \text{ 均为奇数时}\\ \max\{2n,m\} & \text{当 } n \text{ 为奇数 } m \text{ 为偶数时}\end{cases}$$

证明　令 $V=V(K_{m,n})=V_1\cup V_2$,$E=E(K_{m,n})$ 其中 $V_1=\{u_1,u_2,\cdots,u_n,u_{n+1},\cdots,u_m\}$,$V_2=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$

情况 1　当 m 和 n 均为奇数时;若 $n=1$ 时,定理显然成立,下设 $n\geqslant 2$.

设 f 为 $K_{m,n}$ 的一个符号星控制函数,且使得 $\gamma'_{ss}(K_{m,n})=\sum_{e\in E}f(e)$,由定义知:对于每个 $v\in V_1$,均有 $\sum_{e\in E}f(e)\geqslant 1$,故 $\gamma'_{ss}(K_{m,n})=\sum_{e\in E}f(e)\sum_{v\in V_1}\sum_{e\in E(v)}f(e)\geqslant\sum_{v\in V_1}1=m$.

下面定义 $K_{m,n}$ 的一个符号星控制函数 f 使得 $\sum_{e\in E}f(e)=m$ 即可.

中国知网 https://www.cnki.net

令 $M=\{u_iv_i, u_jv_n \mid i=1,2,\cdots,n, j=n+1, n+2,\cdots,m\}$, $G_1=K_{m,n}-M$ 为一个偶度二部图，由引理4知 $E(G_1)$ 可分拆成若干偶圈之并，对于每个偶圈的边交替地定义 f 的值为 $+1$ 和 -1；而当 $e\in M$ 时定义 $f(e)=1$. 不难验证 f 为 $K_{m,n}$ 的一个符号星控制函数且有 $\sum_{e\in E}f(e)=|M|=m$.

情况2 当 n 为偶数时；与情况1类似，但此时 $\sum_{e\in E(v)}f(e)$ 为偶数，故 $\sum_{e\in E(v)}f(e)\geqslant 2$，从而得到 $\gamma'_{ss}(K_{m,n})\geqslant 2m$。下面定义 $K_{m,n}$ 的一个符号星控制函数 f 使得 $\sum_{e\in E}f(e)=2m$ 即可.

(1) 当 m 为奇数时；令 $K_{m,n-1}=k_{m,n}-v_n$，记 $E_1=E(K_{m,n-1})$. 由情况1知存在 $K_{m,n-1}$ 一个符号星控制函数 f_1 使得 $\sum_{e\in E_1}f_1(e)=m$. 定义 $K_{m,n}$ 的一个符号星控制函数 f：

$$f(e)=\begin{cases} f_1(e) & e\in E_1 \\ +1 & e=u_iv_n(1\leqslant i\leqslant m)\end{cases}$$

可见 $\sum_{e\in E}f(e)=m+m=2m$.

(2) 当 m 为偶数时；当 $n=1$ 时定理显然成立，下设 $n\geqslant 4$. 注意到均为偶数.

分拆 $V_1=V_{11}\cup V_{12}$, $V_{11}\cap V_{12}=\varnothing$，其中 $|V_{11}|=n$, $|V_{12}|=m-n$，令 $V_{21}=\{v_1,v_2\}$.

记 $K_{n,n}$ 和 $K_{m-n,2}(m>n)$ 均为 $K_{m,n}$ 的导出子图(当 $m=n$ 时 $K_{m-n,2}=\varnothing$)，其中 $V(K_{n,n})=V_{11}\cup V_2$, $V(K_{m-n,2}=V_{12}\cup V_{21}$. 在 $K_{n,n}$ 中取一个生成圈 C_{2n}，令 $G=K_{m,n}-E(C_{2n})-E(K_{m-n,2}$，可见 G 为一个偶度二部图，由引理4知其可分拆成若干偶圈之并，对于每个偶圈的边交替地定义 f 的值为 $+1$ 和 -1；而当 $e\in E(C_{2n})\cup E(K_{m-n,2})$ 时定义 $f(e)=1$. f 为 $K_{m,n}$ 的一个符号星控制函数且使得 $\sum_{e\in E}f(e)=2n+2(m-n)=2m$.

情况3 当 n 为奇数为偶数时；

(1) 当 $m\geqslant 2n$ 时，与情况2(2)中一样定义 $K_{m,n}$ 的导出子图 $K_{n,n}$，记 $E_1=E(K_{n,n})$. 设 $K_{m-n,n}$(若存在且 $m-n>n$ 时为 $K_{m,n}$ 的另一个导出子图，$V(K_{m-n,n})=V_{12}\cup V_2$. $K_{n,n}$ 中去掉一个完美匹配 M 后得到一个偶度二部图，由引理4知其可分拆成若干偶圈之并，对于每个偶圈的边交替地定义 f_1 的值为 $+1$ 和 -1；当 $e\in M$ 时定义 $f(e)=1$. 此外，注意到 $m-n$ 和 n 均为奇数且 $m-n\geqslant n$，记 $E_2=E(K_{m-n,n})$，由情况1得知：存在 $K_{m-n,n}$ 的一个符号星控制函数 f_2 使得 $\sum_{e\in E_2}f_2(e)=m-n$. 定义如下：

$$f(e)=\begin{cases} f_1(e) & \text{当 } e\in E_1 \text{ 时} \\ f_2(e) & \text{当 } e\in E_2 \text{ 时}\end{cases}$$

可见 f 为 $K_{m,n}$ 的一个符号星控制函数且使得 $\sum_{e\in E}f(e)=n+(m-n)=m$.

(2) 当 $2n>m$ 时；与情况3(1)同样地(注意到 $n>m-n$)，存在 $K_{m,n,n}$ 的一个符号星控制函数 f_2 使得 $\sum_{e\in E_2}f_2(e)=n$，同样定义 f，即得 $\sum_{e\in E}f(e)=n+n=2n$，至此，定理6证毕.

参考文献：

[1]Baogen Xu. On edge domination numbers of graphs[J]. Discrete Math. 294 (2005) 311～316.

[2]徐保根. 关于图的符号星控制数[J]. 华东交通大学学报，4(2004)116～118.

[3]F. 哈拉里，图论[M]，上海科技出版社，1980.

[4]Baogen Xu. On signed edge domination numbers of graphs. *Discrete Math*. 239 (2001) 179～189.

The Signed Star Domination Numbers for Two Classes of Graphs

XU Bao-gen

(School of Natural Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: the concept of signed star domination was introduced in [1～2], and in which the signed star domination numbers of all complete graphs were determined. In this paper we determine the signed star domination numbers of all wheels and complete bipartite graphs.

中国知网 https://www.cnki.net

Key words: wheel; complete bipartite graph; signed star domination function; signed star domination number.