

文章编号: 1005—0523(2005)04—0149—03

关于图的主控制数

汤鹏志

(华东交通大学 基础科学学院, 江西 南昌 330013)

摘要: 设 $\gamma_{maj}(G)$ 表示一个图 G 的主控制数, $g(n, \delta) = \min\{\gamma_{maj}(G) \mid G \text{ 为一个 } n \text{ 阶图且 } \delta(G) = \delta\}$ 对于所有整数 n 和 $\delta (n > \delta \geq 1)$, 本文确定了 $g(n, \delta)$ 的值. 此外, 还给出了图的主控制数的另一个下界, 这也推广了文[1]中的一个结果.

关键词: 主控制函数; 主控制数

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

本文所指的图均为无向简单图, 文中未说明的符号和术语同于文献[1, 7].

设 $G = (V, E)$ 为一个图, 其顶点集 $V = V(G)$ 和边集 $E = E(G)$, 对于任意 $u \in V(G)$, 则为 $N_G(u)$ 为 u 点在 G 中的邻域, $N_G[u] = N_G(u) \cup \{u\}$ 为 u 点在 G 中的闭邻域, 在不混淆情况下, $N_G(u)$ 和 $N_G(u)$ 可分别简记为 $N(u)$ 和 $N[u]$. 若 $A, B \subseteq V$, 则记 $E(A, B) = \{uv \in E \mid u \in A, v \in B\}$. 若 G 和 H 是两个不交的图, 则 $G + H$ 表示将 G 的每个顶点邻接 H 的每个顶点所得的图 $\bar{G}$ 表示图 G 的补图. $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 分别为图 G 的最小度和最大度.

对于一个实值函数 $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ 和一个子集 $S \subseteq V$, 则记 $f(S) = \sum_{u \in S} f(u)$. 对于任意 $v \in V(G)$, 则 $f(N[v])$ 可简记为 $f[v]$. 此外, $f(v)$ 称为 v 点在 f 下的标号.

定义1 [1~2] 设 $G = (V, E)$ 为一个 n 阶图, 一个双值函数 $f: V \rightarrow \{-1, 1\}$ 如果满足条件: V 中至少有 $\frac{n}{2}$ 个顶点 v 使得 $f[v] \geq 1$ 成立, 则称 f 为图 G 的一个主控制函数, 图 G 的主控制数定义为

$$\gamma_{maj}(G) = \min\{f(V) \mid f \text{ 为图 } G \text{ 的主控制函数}\}.$$

对于图的主控制数, 目前已经确定了某些特殊图的主控制数[1~3], 如路、星、圈、完全图和完全二部图等. 文[1~2]中也给出了关于正则图主控制数的一个下界, 即

引理1 [1~2] 对于任意 n 阶 r -正则图 G , 则其主控制数

$$\gamma_{maj}(G) \geq \begin{cases} \left\lceil \frac{1-r}{2r+2} \right\rceil n & \text{当 } r \text{ 为奇数时} \\ \left\lfloor \frac{-r}{2r+2} \right\rfloor n & \text{当 } r \text{ 为偶数时} \end{cases}$$

并且此下界是最好可能的.

在本文中, 我们确定了最小度为 δ 的所有 n 阶图的最小主控制数, 并且联系到图的最小度和最大度, 给出了 n 阶图的主控制数的一个下界, 推广了引理1的结果.

定理1 令 $G(n, \delta) = \min\{\gamma_{maj}(G) \mid G \text{ 为一个 } n \text{ 阶图且 } \delta(G) = \delta\}$, 则对于所有整数 n 和 $(n > \delta \geq 1)$, 均有

$$g(n, \delta) = \lceil \frac{\delta+2}{2} \rceil - n.$$

证明 证明过程分为两步:

第一步证明: 对任意 n 阶图 G , 若 $\delta = \delta(G)$ 则

$$\gamma_{maj}(G) \geq \lceil \frac{\delta+2}{2} \rceil - n.$$

收稿日期: 2005—04—18

基金项目: 江西省自然科学基金资助课题(0311047)

作者简介: 汤鹏志(1961—), 男, 江西九江人, 副教授.

设 f 是图 G 的一个主控制函数, 且使得 $\gamma_{maj}(G) = f(V)$, 由主控制函数的定义知, V 中至少有一个顶点 v 使得 $f[v] = \sum_{u \in N[v]} f(u) \geq 1$, 注意到 $|N[v]| = d(v) + 1 \geq \delta + 1$, 从而 $N[v]$ 中至少有 $\lceil \frac{\delta+2}{2} \rceil$ 个顶点在 f 下的标号为 $+1$, 即 V 中至多有 $n - \lceil \frac{\delta+2}{2} \rceil$ 个顶点在 f 下的标号为 -1 , 故有

$$\gamma_{maj}(G) = f(V) \geq \lceil \frac{\delta+2}{2} \rceil - (n - \lceil \frac{\delta+2}{2} \rceil) = \lceil \frac{\delta+2}{2} \rceil - n. \text{ 第一步证毕.}$$

第二步证明: 对任意整数 n 和 $(n > \delta \geq 1)$, 存在 n 阶图 G 使得 $\delta = \delta(G)$ 且 $\gamma_{maj}(G) = \lceil \frac{\delta+2}{2} \rceil - n$ 成立.

情况 1 当 $\delta = 1$ 时, 图 G 构造如下: $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$,

$$E(G) = \{v_1 v_2, v_3 v_1\} \cup \{v_j v_j\} = 4, 5, \dots, n, j = 1, 2\}$$

定义 f 如下: $f(v_1) = f(v_2) = 1$ 并且 $f(v_i) = -1 (i = 3, 4, \dots, n)$. 注意到 $\delta = \delta(G) = d(v_3) = 1$, 不难验证, f 为图 G 的一个主控制函数, 且 $f(V) = 2 - (2 - n) = \lceil \frac{\delta+2}{2} \rceil - n$, 由主控制数的定义知 $\gamma_{maj}(G) \leq f(G)$, 由上述已得的下界, 我们有 $\gamma_{maj}(G) = \lceil \frac{\delta+2}{2} \rceil - n$.

情况 2 当 $\delta = 2$ 时,

若 $n = 3$, 则 $G = K_3$ 为完全图, 显然 $\gamma_{maj}(K_3) = 1$, 定理成立.

若 $n \geq 4$, 取 $G = K_{2, n-2} = (V_1 UV_2, E)$ 为完全二部图, 其中 $|V_1| = 2, |V_2| = n - 2$. 定义 f 如下:

当 $v \in V_1$ 时 $f(v) = 1$, 当 $v \in V_2$ 时 $f(v) = -1$. 不难验证, f 为图 G 的一个主控制函数, 且 $f(V) = 2 - (2 - n) = \lceil \frac{\delta+2}{2} \rceil - n$. 因此与情况 1 同样得到:

$$\gamma_{maj}(G) = \lceil \frac{\delta+2}{2} \rceil - n.$$

情况 3 当 $\delta \geq 3$ 且 δ 为偶数时, 如果 $\delta = n - 1$, 则 G 为奇数阶完全图, 显然, $\gamma_{maj}(K_n) = 1 = \lceil \frac{\delta+2}{2} \rceil - n$. 下设 $\delta \leq n - 2$, 令 $t = \frac{\delta+2}{2}$,

(3.1) 若 t 为偶数或者 n 为奇数; 令 H 为一个 $n - t$ 阶 $t - 2$ 度正则图, $G = K_t + H$, 可见 $\delta(G) = \delta$. 定义 f 如下: 当 $v \in V(K_t)$ 时 $f(v) = 1$, 当 $v \in V(H)$ 时 $f(v) = -1$. 可见对于每个 $v \in V(H)$, 均有 $f[v] = t - (t - 1) = 1$, 注意到

$$= t - (t - 1) = 1 \text{ 并且 } |V(H)| = n - t \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil. \text{ 因此, } f \text{ 为图 } G \text{ 的一个主控制函数, 且 } f(V) = t - (n - t) = \lceil \frac{\delta+2}{2} \rceil - n, \text{ 故与情况 1 同样得到 } \gamma_{maj}(G) = \lceil \frac{\delta+2}{2} \rceil - n.$$

(3.2) 若为奇数并且 n 为偶数; 当 $n = \delta + 2$ 时, 取 G 为 K_n 中去掉一个完美匹配 $M = \{u_1 v_1, u_2 v_2, \dots, u_{\frac{n}{2}} v_{\frac{n}{2}}\}$ 所得的图. 定义 f 如下: $f(u_i) = 1, f(v_i) = -1 (i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2})$, f 为图 G 的一个主控制函数, 且 $f(V) = 0$, 即有 $\gamma_{maj}(G) = \lceil \frac{\delta+2}{2} \rceil - n$. 当 $n \geq \delta + 4$ 时 (注意到 n 和 δ 均为偶数), 令 $G = K_{t-1} + (H + \overline{K_2})$, 其中 H 为一个 $n - t - 1$ 阶 $\delta - (t + 1) = \frac{\delta - 4}{2}$ 度正则图. 记 $V(\overline{K_2}) = \{u_1, u_2\}$, 定义 f 如下: $f(u_1) = 1, f(u_2) = -1$; 当 $v \in V(K_{t-1})$ 时 $f(v) = 1$; 当 $v \in V(H)$ 时 $f(v) = -1$. 可见 $\delta(G) = \delta$, 且不难验证: f 为图 G 的一个主控制函数, 且 $f(V) = t - (n - t) = \lceil \frac{\delta+2}{2} \rceil - n$, 即有 $\gamma_{maj}(G) = \lceil \frac{\delta+2}{2} \rceil - n$.

情况 4 当 $\delta \geq 3$ 且 δ 为奇数时; 此时令 $t = \lceil \frac{\delta+2}{2} \rceil = \lceil \frac{\delta+3}{2} \rceil$.

如果 $n = \delta + 1$; 则 G 为偶数阶完全图, 显然有 $\gamma_{maj}(K_n) = 2 = \lceil \frac{\delta+2}{2} \rceil - n$.

如果 $n = \delta + 2$; 此时 n 为奇数, 取 G 为 K_n 中去掉 $\frac{n-1}{2}$ 条独立边集 $M = \{u_1 v_1, u_2 v_2, \dots, u_{\frac{n-1}{2}} v_{\frac{n-1}{2}}\}$ 所得的图. 定义 f 如下: $f(v_i) = -1 (i = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2})$, 对其它顶点 v , 均定义 $f(v) = 1$, 可见 f 为图 G 的一个主控制函数, 且 $f(V) = 1 = 2t - n$, 即有 $\gamma_{maj}(G) = \lceil \frac{\delta+2}{2} \rceil - n$.

下设 $n \geq \delta + 3$;

(4.1) 当 n 为偶数或者 t 为奇数时, 注意到 $t \geq 3$. 令 $G = K_t + H$, 其中 H 为一个 $n - t$ 阶 $t - 3$ 度正则图, 可见 $\delta(G) = \delta$. 定义 f 如下: 当 $v \in V(K_t)$ 时 $f(v) = 1$, 当 $v \in V(H)$ 时 $f(v) = -1$. 可见对于每个 $v \in V(H)$, 均有 $f[v] = t - (t - 1) = 1$, 注意到 $n \geq \delta + 3 = 2t$, 即 $|V(H)| = n - t \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. 因此,

f 为图 G 的一个主控制函数, 且 $f(V) = t - (n - t) = \lceil \frac{\delta+2}{2} \rceil - n$, 故有 $\gamma_{maj}(G) = \lceil \frac{\delta+2}{2} \rceil - n$.

(4.2) 当 n 为奇数并且为偶数时, 注意到此时 $t \geq 4$.

令 $G = K_{t-1} + (\overline{K_2} + H)$, 其中 H 为一个 $n - t - 1$ 阶 $t - 4$ 度正则图, 可见 $\delta(G) = \delta$. 定义 f 如下: $\overline{K_2}$ 中的两个顶点在 f 下的标号分别为 $+1$ 和 -1 , K_{t-1} 中每个顶点在 f 下的标号均为 $+1$, H 中每个顶点在 f 下的标号均为 -1 , 可见 f 为 G 的主控制函数.

且 $f(V) = 2t - n = \lceil \frac{\delta+2}{2} \rceil - n$, 即有 $\gamma_{maj}(G) = \lceil \frac{\delta+2}{2} \rceil - n$. 综合情况 1 ~ 4, 第二步证毕.

至此, 定理 1 证毕.

定理 2 对于任意 n 阶图 G , 若 $\Delta = \Delta(G)$ 和 $\delta = \delta(G)$ 分别表示图 G 的最大度和最小度, 则

$$\gamma_{maj}(G) \geq \lceil \frac{\delta+2}{2} \rceil \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil - n$$

并且此下界是最好可能的.

证明 设 f 是图 $G = (V, E)$ 的一个主控制函数, 且使得 $\gamma_{maj}(G) = f(V)$.

令 $A = \{v \in V \mid f(v) = 1\}$, $B = \{v \in V \mid f(v) = -1\}$, $|A| = t$ 则 $|B| = n - t$, 并且因此 $\gamma_{maj}(G) = t - (n - t) = 2t - n$.

令 $C = \{v \in V \mid |f[v]| \geq 1\}$, 由主控制函数的定义知 $|C| \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil - n$. 对于每个 $u \in C$, 由于 $|f[u]| \geq 1$, 故 $N[u]$ 中至少 $\lceil \frac{\delta+2}{2} \rceil$ 个顶点在 f 下的标号均为 $+1$. 因此, 令 $P(u) = |N[u] \cap A|$, 我们有

$\sum_{u \in C} P(u) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot \lceil \frac{\delta+2}{2} \rceil$. 另一方面, 在 f 下的标号为 $+1$ 的每个顶点至多在 $\Delta + 1$ 个不同的闭邻域中, 从而 $(\Delta + 1)t \geq \sum_{u \in V} P(u) \geq \sum_{u \in C} P(u)$, 即有 $t \geq$

$\lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot \lceil \frac{\delta+2}{2} \rceil / (\Delta + 1)$, 注意到 t 为整数, 并且 $\gamma_{maj}(G) = 2t - n$. 因此, 定理 2 给出的下界成立, 并且此下界是最好可能的 (见以下注 1). 定理 2 证毕.

注 1: 在定理 2 中, 特殊地令 $\Delta = \delta = r$ 时, 则 G 为 n 阶 r -正则图, 并注意当 r 为奇数时 n 为偶数, 不难得到引理 1 给出的下界, 由于引理 1 的下界是最好可能的, 故定理 2 给出的下界是最好可能的. 定理 2 当然也是引理 1 的重要推广.

参考文献:

- [1] M. A. Henning, Domination in regular graphs. Ars. Combin. 43(1996) 263~271.
- [2] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and P. J. Slater, Domination in graphs[M]. New York, 1998, 95~105.
- [3] Zhongfu Zhang, Baogen Xu etc. A note on the lower bounds of signed domination numbers of a graph[J]. Discrete Math. 195 (1999) 295~298.
- [4] Baogen Xu, On minus domination and signed domination in graphs[J]. 数学研究与评论, 4(2003)586~590.
- [5] Baogen Xu, On signed edge domination numbers of graphs[J]. Discrete Math., 239(2001), 179~189.
- [6] J. H. Hattingh and E. Ungerer, The signed and minus k -sub-domination numbers of comets[J]. Discrete Math., 183 (1998) 141~152.
- [7] F. 哈拉里. 图论[M]. 上海: 上海科技出版社, 1980.

On Majority Domination Numbers of Graphs

TANG Pengzhi

(School of Natural Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Let $\gamma_{maj}(G)$ be the majority domination number of a graph G , $g(n, \delta) = \min\{\gamma_{maj}(G) \mid G \text{ is a graph of order } n \text{ with } \delta(G) = \delta\}$. In this paper we determine the exact value of $g(n, \delta)$ for all integers n and δ ($n \geq \delta \geq 1$), and give a lower bound of the majority domination numbers of graphs, which generalize a result of [1].

Key words: majority dominating function; majority domination number.