第22卷第4期　　华东交通大学学报　　Vol.22 No.4
2005年08月　　Journal of East China Jiaotong University　　Aug., 2005

文章编号:1005－0523(2005)04－0152－03

圈和扇的联图的全染色

马　刚[1],刘　华[1,2],唐国梅[1],张忠辅[1,3]

(1.西北民族大学 计算机科学与信息工程学院,甘肃 兰州 730030;2.兰州大学 数学与统计学院,甘肃 兰州 730000;3.兰州交通大学 应用数学研究所,甘肃 兰州 730070)

摘要:关于圈和扇的联图 $C_m \vee F_n$,本文得到了在 m,n 不同取值情况下的全色数.

关键词:圈;扇;联图;全色数

中图分类号:O157.5　　**文献标识码**:A

1　引　言

具有重要的实际意义和理论意义的图的染色问题,是图论研究的主要内容之一,图的染色的基本问题就是确定其各种染色法的色数.已经公认,确定图的有关色数是一个十分困难的问题,图的全染色[1-3]猜想已有40年,但是所知结果甚少.本文给出了圈 C_m 与扇 F_n 的联图的全色数.

2　相关定义及引理

定义1[1-2]　对图 $G(V,E)$ 的映射 $f:E\xrightarrow{f}\{1,2,\cdots,k\}$,若满足任意相邻的边 e,e' 有 $f(e)\neq f(e')$,则称 f 为G的一个k－正常边染色法,简记作k－PEC of G,而

$$\chi'(G)=\min\{k \mid k-\text{PEC of } G\}$$

称为 G 的边色数.

定义2[1]　对图 $G(V,E)$ 的映射 $f:\{V,E\}\xrightarrow{f}\{1,2,\cdots,k\}$,若满足下列条件:

1) $\forall u,v\in V, uv\in E$,且 $u\neq v$,有 $f(u)\neq f(v)$;

2) $\forall uv,uw\in E, v\neq w$,有 $f(uv)\neq f(uw)$;

3) $\forall u,v\in V, uv\in E$,且 $u\neq v$,有 $f(u)\neq f(uv), f(v)\neq f(uv)$.

则称 f 为 G 的一个k－全染色法,简记作k－TC of G,而

$$\chi_T(G)=\min\{k \mid k-\text{TC of } G\}$$

称为 G 的全色数.

显然有 $\chi_T(G)\geqslant\Delta(G)+1$,其中 $\Delta(G)$ 表示 G 的最大度数.

定义3[2]　设图 G 与 H 有:$V(G)\cap V(H)=\varnothing$; $E(G)\cap E(H)=\varnothing$.若 $G\vee H$ 满足:

1) $V(G\vee H)=V(G)\cup V(H)$;

2) $E(G\vee H)=E(G)\cup E(H)\cup\{uv \mid u\in V(G), v\in V(H)\}$.

则称 $G\vee H$ 为G与H的联图.

猜想1[1-2]　对简单图 G,有 $\chi_T(G)\leqslant\Delta(G)+2$.

引理1[1]　对 n 阶完全图 K_n,有

$$\chi_T(K_n)=\begin{cases} n, & n\equiv 1 \pmod 2;\\ n+1, & n\equiv 0 \pmod 2.\end{cases}$$

收稿日期:2005－06－10

基金项目:国家自然科学基金资助项目(19871036)

作者简介:马　刚(1975－),男,回族,甘肃定西人,讲师,主要从事应用数学、图论的研究.

引理 2[1]　若 H 是 G 的子图,则有 $\chi_T(H) \leqslant \chi_T(G)$.

引理 3[4]　对简单图 G,若 $G[V_\Delta]$ 无圈,则有 $\chi'(G)=\Delta(G)$.

其中 $V_\Delta=\{v \mid d(v)=\Delta, v\in V(G)\}$, $E(G[V_\Delta]=\{uv \mid d(u)=d(v)=\Delta, uv\in E(g)\}$.

文中未加述及的术语、记号可参见[1-5].

3　主要结论及其证明

在以下的讨论中,记 m 阶圈 $C_m=u_1u_2\cdots u_mu_1$, $(m\geqslant 3)$.记 $n+1$ 阶扇 F_n:$V(F_n)=\{v_i \mid i=0,1,2,\cdots,n\}$;$E(F_n)=\{v_0v_i \mid i=1,2,\cdots,n\}\cup\{v_iv_{i+1} \mid i=1,2,\cdots,n-1\}$,$(n\geqslant 2)$.

定理 1　当 $m>n=2$ 时,对 C_m 有 $\vee$ F_2 有

$$\chi_T(C_m\vee F_2)=\begin{cases}7, & m=3;\\ m+3, & m\geqslant 4.\end{cases}$$

证明　以下分三种情形对本定理予以证明.

Case 1:当 $m=3$ 时.则 $C_3\vee F_2=K_6$,由引理 1 知此时结论成立.

Case 2:当 $m=4$ 时.易见 $\Delta(C_4\vee F_2)=6$,则有 $\chi_T(C_4\vee F_2)\geqslant 7$.又因 $C_4\vee F_2$ 是 K_7 的一个子图,则由引理 1 和引理 2 知 $\chi_T(C_4\vee F_2)\leqslant\chi_T(K_2)=7$.从而得 $\chi_T(C_4\vee F_2)=7$,所以此时结论成立.

Case 3:当 $m\geqslant 5$ 时.设匹配集 $M=\{v_0u_2, v_1v_2\}$,定义图 G^* 为:

1) $V(G^*)=V(C_m\vee F_2)\cup\{w\}$;

2) $E(G^*)=E(C_m\vee F_2\setminus M)\cup\{wv_0, wv_1, wv_2, wu_2\}\cup\{wu_i \mid i=4,5,\cdots,m\}$.

则 $V_\Delta(G^*)=\{v_0,v_1,v_2\}$,且 G^* 最大度点的导出图 $G[V_\Delta]=v_1v_0v_2$ 是 3 阶路.从而由引理 3 知:

$$\chi'(G^*)=\Delta(G^*)=m+2.$$

令 f_1 为 G^* 的一个 $(m+2)$-PEC 法,在 f_1 的基础上对 $C_m\vee F_2$ 作映射 f_2 为:

$f_2(v_i)=f_1(wv_i), i=0.1,2$;　$f_2(u_2)=f_1(wu_2)$;　$f_2(u_i)=f_1(wu_i)$,　$i=4,5,\cdots,m$.

令 $f_3=$ 为:　$f_3(v_1v_2)=f_3(v_0u_2)=m+3$; $f_3(u_1)=f_3(u_3)=m+3$

从而将 f_1,f_2,f_3 合在一起,恰好构成 $C_m\vee F_2$ 的一个 $(m+3)$-TC 法,所以此时结论成立.

综上所述,定理为真.

定理 2　当 $n=3$ 时,对 $C_m\vee F_3$ 有 $\chi_T(C_m\vee F_3)=m+4$.

证明　以下分三种情形对本定理予以证明.

Case 1:当 $m=3$ 时.易见 $\Delta(C_3\vee F_3)=6$,则有 $\chi_T(C_3\vee F_3)\geqslant 7$.又因 $C_3\vee F_3$ 是 K_7 的一个子图,则由引理 1 和引理 2 知 $\chi_T(C_3\vee F_3)\leqslant\chi_T(K_7)=7$.从而得 $\chi_T(C_3\vee F_3)=7$,所以此时结论成立.

Case 2:当 $m=4$ 时.易见 $\Delta(C_4\vee F_3)=7$,则 $\chi_T(C_4\vee F_3)\geqslant 8$,为了证明结论成立,仅需给出 $C_4\vee F_3$ 的一个 8-TC 法.令 f 为:

$f(u_2)=f(u_4)=f(v_0v_3)=f(u_1v_2)=1$;

$f(u_1)=f(u_3)=f(v_0v_2)=f(u_2v_3)=f(u_4v_1)=2$;

$f(v_1)=f(v_2v_3)=f(u_2u_3)=f(u_4v_0)=3$;

$f(v_3)=f(u_1v_0)=f(u_2v_2)=f(u_3v_1)=4$;

$f(u_1v_1)=f(u_2v_0)=f(u_3v_2)=f(u_4v_3)=5$;

$f(u_1v_3)=f(u_2v_1)=f(u_3v_0)=f(u_4v_2)=6$;

$f(v_2)=f(v_0v_1)=f(u_4u_1)=f(u_3v_3)=7$;

$f(v_0)=f(v_1v_2)=f(u_1u_2)=f(u_3v_4)=8$.

由此可见,f 是 $C_4\vee F_3$ 的 8-TC 法,所以此时结论成立.

Case 3:当 $m\geqslant 5$ 时.设匹配集 $M=\{v_0v_2\}$,定义图为 G^*

1) $V(G^*)=V(C_m\vee F_3)\cup\{w\}$;

2) $E(G^*)=E(C_m\vee F_3\setminus M)\cup\{wv_0, wv_2\}\cup\{wu_i \mid i=1,2,...,m\}$.

则 $V_\Delta(G^*)=\{v_0,v_2\}$,且 G^* 最大度点的导出图 $G[V_\Delta]$ 的边集 $E(V_\Delta)=\emptyset$.从而由引理 3 知:

$$\chi_T(G^*)=\Delta(G^*)=m+3.$$

令 f_1 为 G^* 的一个 $(m+3)$-PEC,在 f_1 的基础上对 $C_m\vee F_3$ 作映射 f_2 为:

$$f_2(v_0=f_1(wv_0);\quad f_2(v_2)=f_1(wv_2);$$
$$f_2(u_i)=f_1(wu_i), i=1,2,\cdots,m.$$

令 f_3 为　$f_3(v_0v_2)=f_3(v_1)=f_3(v_3)=m+4$.

从而将 f_1,f_2,f_3 合在一起,恰好构成 $C_m\vee F_3$ 的一个 $(m+4)$-TC 法,所以此时结论成立.

综上所述,定理为真.

定理 3　当 $n\geqslant 4$ 时,对 $C_m\vee F_n$ 有 $\chi_T(C_m\vee F_n)=m+n+1$.

证明　以下分两种情形对本定理予以证明.

Case 1:当 $n>m=3$ 时.易见 $\Delta(C_3\vee F_n)=n+3$,则 $\chi_T(C_3\vee F_n)\geqslant n+4$,为了证明结论成立,仅需给出 $C_3\vee F_n$ 的一个 $(n+4)$-TC 法.令 f 为:

$f(u_iv_j)=i+j, i=1,2,2, j=0,1,\cdots,n$;

$$f(v_0v_j)=j+4,\quad j=1,2,\cdots,n;$$
$$f(v_1v_2)=f(u_3v_1)=f(u_2)=n+4;$$
$$f(v_j,v_{j+1})=j-1,\quad j=2,3,\cdots,n-1;$$
$$f(u_1u_2)=f(v_2)=n+3;$$
$$f(u_2u_3)=f(v_1)=f(v_4)=1;$$
$$f(u_1)=n+2;$$
$$f(u_3)=2;\quad f(v_0)=4,\quad f(v_3)=3;$$
$$f(v_j)=j,\quad j=5,6,\cdots,n,(n\geqslant 5).$$

由此可见，f 是 $C_3\vee F_n$ 的 $(n+4)$ —TC 法，所以此时结论成立.

Case 2：当 $n\geqslant 4$ 且 $m\geqslant 4$ 时.由于 $\Delta(C_m\vee F_n)=m+n$，则有 $\chi_T(C_m\vee F_n)\geqslant m+n+1$.为了证明结论成立，仅需证明 $C_m\vee F_n$ 存在一个 $(m+n+1)$ —TC 法.又因此时 $C_m\vee F_n$ 只有一个最大度点 v_0，记 $G^*=(C_m\vee F_n)\vee\{w\}$，则 $V_\Delta(G^*)=\{v_0,w\}$，且 G^* 最大度点的导出图 $G[V_\Delta]=wv_0$ 是2阶路.从而由引理3知：$\chi'(G^*)=\Delta(G^*)=m+n+1$.

令 f^* 为 G^* 的一个 $(m+n+1)$ —PEC 法，在 f^* 的基础上对 $C_m\vee F_n$ 作映射 f 为：

$$f(u)=f^*(wu),\quad u\in V\chi(C_m\vee F_n);$$
$$f(uw)=f^*(uw),\quad uw\in E(C_m\vee F_n).$$

由此可见，f 为 $C_m\vee F_n$ 的一个 $(m+n+1)$ —TC 法，所以此时结论成立.

综上所述，定理为真.

参考文献：

[1] H. P. Yap. Total colorings of graphs [M]. Notes in mathematics, 1623 springer Berlin, 1996.

[2] J. A. Bondy, U. S. R. Murty. Graph Theory with applications [M]. The Macmillan press Ltd, 1976.

[3] 田 牛，马仲番，图与网络流理论[M].北京：科学出版社，1987.

[4] 张忠辅，张建勋，第Ⅰ类图的若干充分条件[J].数学杂志，1985，5(2)161—165.

[5] 张忠辅，王建方.关于图的全着色——一个综述[J].数学进展，(1992)，4，390—397.

On Total Chromatic Number of $C_m\vee F_n$

MA Gang[1], LIU Hua[1,2], TANG Guo-mei[1], ZHANG Zhong-fu[1,3]

(1. The College of Computer Science and Information Engineering, Northwest University for Nationalities, Lanzhou, 730030; 2. School of Mathematics and Statistics, Lanzhou University, Lanzhou, 730000; 3. Institute of Applied Mathematics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, We have given the total chromatic number of.

Key words: cycle; fan; join-graph; total chromatic number