文章编号：1005－0523(2005)04－0158－03

带马氏系数的随机方程 $Y_n = aY_{n-1} + bx_nY_{n-1} + x_n$

曹梅英，刘　琴，李芳芳

(中南大学 概率论与数理统计研究所，湖南 长沙 410075)

摘要：主要讨论带马氏系数的随机方程 $Y_n = aY_{n-1} + bx_nY_{n-1} + x_n n \in Z$ 的稳定性，其中(X_n)是有限状态马氏链．由模型的参数，我们直接给出了解的平稳性的存在条件．

关　键　词：马氏链；Lyapounov 指数；谱半径

中图分类号：TM392.3　　　　**文献标识码**：A

1　引　言

我们研究下面一类随机差分方程：

$$Y_n = aY_{n-1} + bx_nY_{n-1} + x_n \qquad n \in Z \tag{1}$$

其中$\{x_n\}$有限状态空间上的稳定正常返的马氏链，其状态空间是 $E = \{1, 2, \cdots, m\}$，转移矩阵为 P，不变概率测度为 μ，a 与 b 是常数．这是一个带有 ARCH(1)一型误差的 $AR(1)$过程，这个对模型在金融时间序列有很好的应用．这个过程在 m 个差分 AR 过程跳，而这种跳被一个马氏链控制．

(Brandt，1986)，已经解决方程(1)稳定性的存在问题：此方程有稳定遍历解如果下面的 Lyapounov 指数 γ 是负的．即

$$\gamma = \inf_{p \geq 1} \frac{1}{p} E\log \| (a + bx_p)(a + bx_{p-1}) \cdots (a + bx_1) \| < 0 \tag{2}$$

这个判别准则很难验证，因为它不直接依赖于模型中的参数：转移矩阵 P，a 和 b．在本文中，我们给出了稳定解的存在条件．我们的条件直接成模型中的参数形式，并且给出了解的表达式．

2　主要结果

用 $\rho(\boldsymbol{A})$表示矩 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$的谱半径，$\boldsymbol{P} = (p_{ij})$表示马氏链 X 的转移矩阵，且 $\boldsymbol{P}_{ij} = (x_{t+1} = j | x_t = i)$．在本文中下面的矩阵将起着重要的作用：

$$M = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{11}(a + bx_1)^2 & \cdots & \boldsymbol{P}_{m1}(a + bx_m)^2 \\ \vdots & \boldsymbol{P}_{ji}(a + bx_j)^2 & \vdots \\ \boldsymbol{P}_{1m}(a + bx_1)^2 & \cdots & \boldsymbol{P}_{mm}(a + bx_m)^2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

定理1　如果 $a = 1$，那么方程(1)定义在 R 的过程$\{Y_n\}$对任意在 $B(R)$的测度 φ 不是 φ一不可约和非遍历的．

证明　对某一 j，如果 $Y_i = -\frac{1}{b}$

那么
$$\begin{aligned} Y_{i+1} &= Y_i + bx_{i+1}Y_i + x_{i+1} \\ &= -\frac{1}{b} - x_{i+1} + x_{i+1} \\ &= -\frac{1}{b} \end{aligned}$$

于是对所有的 $n \geq j$，均有 $Y_n = -\frac{1}{b}$

如果 $y \neq -\frac{1}{b}$ 那么

收稿日期：2004－12－18

基金项目：湖南省杰出青年基金资助(04JJ1001)

作者简介：曹梅英(1977－)，女，湖南长沙人，在读硕士研究生．

$P'〔y,\{-\frac{1}{b}\}〕= P'〔y+(by+1)x_n = -\frac{1}{b}〕$
$=0)$

(其中 P' 是 Y 的转移概率矩阵)

综上所述，$\{-\frac{1}{b}\}$ 和 $R/\{-\frac{1}{b}\}$ 都是吸收集，从而方程(1)定义在 R 的过程，$\{Y_n\}$ 对任意在 $B(R)$ 的测度 φ 不是 φ—不可约和非遍历的.

定理2 假定 $a\neq 1$，且

$$\rho(M)7<1 \tag{4}$$

则方程(1)有稳定遍历解

3 定理2的证明

我们使用下面的记号 $n\geqslant 1$

$\Pi_{n,k} = (a+bx_n)(a+bx_{n-1})\cdots(a+bx_{n-k+1})$

＋定理2的证明的主要思想是在条件(4)成立的前提下，我们证明范数 $E\|\Pi_{n,k}\|^2$ 按指数递减(性质1).由此得到一个重要的推论：方程(1)有唯一的稳定遍历解.并且，这个解可表示为：

$$Y_n = x_n + \sum_{j=1}^{\infty}\{\prod_{i=1}^{j-1}(a+bx_{n-1})\}x_{n-j} \tag{5}$$

实际上，序列 $\Sigma_{j=1}^{\infty}\{\Pi_{i=0}^{j-1}(a+bx_{n-i})\}$ 几乎处处可和

则 $Y_n = x_n + \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{\infty}\{\prod_{i=0}^{j}(a+bx_{n-i}) - a\prod_{i=1}^{j-1}(a+bx_{n-i})\}$

$= x_n + \frac{1}{b}[\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=0}^{j-1}](a+bx_{n-i}) - (a+bx_{n-0})] - \frac{a}{b}\sum_{j=1}^{\infty}(\prod_{i=0}^{j-1}(a+bx_{n-i})〕$

$$= -\frac{a}{b} + \frac{1-a}{b}\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=0}^{j-1}(a+bx_{n-i}) \tag{6}$$

性质1 在条件(4)下，存在一个正的常数 $r\in[0,1]$ 使得对每一个n，有

$$E\|\Pi_{n,k}\|^2 \leq C_1 r^k \qquad k>0 \tag{7}$$

成立

证明 既然对每一个固定的 k，序列 $(\Pi_{n,k})$，关于 n 是稳定的，故我们只要证明

$$E\|\Pi_{k,k}\|^2 = E\|(a+bx_k)(a+bx_{k-1})\cdots(a+bx_1)\|^2 \leq C_1 r^2 \quad k>0 \tag{8}$$

现在，我们考虑下面的递归方程

$Z_{k+1} = (a+bx_k)Z_k \qquad k>0$

对任意给定的开始点(非随机的) $Z_0\in R$.对每一个 $i\in\{1,2,\cdots m\}$，令

$$F_k(i) = E? Z_k^2 I_{\{x_k=i\}}$$

其中 I_B 是集合 B 的示性函数.我们定义

$$F_{k+1}(i) = \sum_{j=1}^{m}E[Z_k^2(a+bx_k)^2 I_{\{x_{k+1}=i,x_k=j\}}]$$
$$= \sum_{j=1}^{m}(a+bx_j)^2 F_k(j)p(j,i) \tag{9}$$

我们来考虑下面的 m 维非随机向量

$F_k = (F_k(1), F_k(2), \cdots, F_k(m))$

那么方程(9)给出了一个从 F_k 到 F_{k+1} 的映射，这个映射我们命名为 T.则 T 是线性非随机的.我们知道 $E\|\Pi_{k,k}\|^2$ 按指数递减当且仅当对任意初始状态 Z_0 出发的 $\|F_k\|$ 依指数递减，也就等价于映射 T 的谱半径小于1.

为了估计 T 的谱半径，我们将给出映射 T 关于一组基(标准基)的矩阵.这组基构造如下：

$$B = \{E_1, E_2, \cdots E_m\}$$

其中 $E_i = (0,0,\cdots,0,1,0,\cdots 0)$，此向量只有在第 i 个位置是1，其它位置上的数是0而映射 T 关于基 B 的矩阵正好是(3)定义的 M.由此只要条件 $\rho(M)<1$ 成立.

完成定理2的证明

现在我们证明Lyapranov 指数 γ 是负的.由于固定会 k，序列 $(\Pi_{n,k})_n$ 关于 n 稳定.由(7)得 $-E\log\|\Pi_{p,p}\| = E\log\|_{0,p}\|$

$= \frac{1}{2}E\log\|\Pi_{0,p}\|^2 \leq \frac{1}{2}\log E\|\Pi_{0,p}\|^2$

$\leq C_2 + \frac{1}{2}p\log\gamma$

于是，

$\gamma = \inf_{p\geq 1}\frac{1}{p}E\log\|(a+bx_p)(a+bx_{p-1})\cdots(a+bx_1)\| \leq \frac{1}{2}\log\gamma < 0$

由定理1(Brandt，1986)，(5)的序列几乎处处收剑.对每一个 n 我们给出了模型(1)的稳定遍历解.

于是定理2已得证.

Refrences

Brandt A(1986).The stochastic equation $Y_{n+1} = A_nY_n + B_n$ with stationary coefficients. Adv. Appl. Prob. 18:211—220

带马氏系数的随机方程 $Y_n = aY_{n-1} + bx_nY_{n-1} + x_n$ 的稳定性

On Stability of the Stochastic Equation $Y_n = aY_{n-1} + bx_bY_{n-1} + x_n$ with Markovian Coffocoents

CAO Mei-ying, LIU Qin, LI Fang-fang

(School of Mathematical Science and Computering Technology, Central South University, Changsha 410075, China)

Abstract: In this paper, we deal with the real stochastic equation $Y_n = aY_{n-1} + bx_nY_{n-1} + x_n$ $n \in z$, where the sequence (x_n) is a finite state Markov chain. We give a condition ensuring the existence of a stationary solution. Our condition is directly expressed in the terms of the parameter of the model.

Key words: Markov chain; Lyapounov exponent; spectral radius