第22卷第5期
2005年10月

华 东 交 通 大 学 学 报
Journal of East China Jiaotong University

Vol.22 No.5
Oct., 2005

文章编号:1005－0523(2005)05－0024－03

无限大弹性体中三维片状裂纹问题的研究

朱成九, 陈梦成, 余会琴

(华东交通大学 土木建筑学院,江西 南昌 330013)

摘要:将有限部积分和边界元法运用到三维裂纹问题中进行应力强度因子的分析.采用三角形和四边形单元网格,使用有限部积分原理来实现相应的边界元法,计算无限大弹性体中三维片状裂纹的应力强度因子.

关 键 词:三维片状裂纹;有限部积分;边界元法;应力强度因子

中图分类号:TP391.4　　　　**文献标识码**:A

0 引言

文献[1]利用双相材料空间在集中力作用下的弹性力学基本解,通过推理和整合得到了交接面附近三维裂纹面的应力场的公式.本文将以此为基础系统地为三维片状裂纹的超奇异积分方程建立数值方法,采用三角形和四边形单元网格,使用有限部积分原理来实现相应的边界元法,计算了无限大弹性体中三维片状裂纹的应力强度因子.

1 无限大弹性体中的超奇异积分方程组

在无限大弹性体中,裂纹离边界的距离很远时,利用文献[1]经简化和整理后可得到如下的超奇异积分方程组:

$$\frac{\mu}{2\pi(\kappa+1)}\left[\fint_S u\left\{\frac{(\kappa-1)}{r_1^3}+\frac{3(3-\kappa)(x-\zeta)^2}{2r_1^5}\right\}ds(\zeta,\eta)+\fint_S v\left\{\frac{3(3-\kappa)(x-\zeta)(y-\eta)}{2r_1^5}\right\}ds(\zeta,\eta)\right]=-p_1(x,y) \tag{1a}$$

$$\frac{\mu}{2\pi(\kappa+1)}\left[\fint_S u\left\{\frac{3(3-\kappa)(x-\zeta)(y-\eta)}{2r_1^5}\right\}ds(\zeta,\eta)+\fint_S v\left\{\frac{(\kappa-1)}{r_1^3}+\frac{3(3-\kappa)(y-\eta)^2}{2r_1^5}\right\}ds(\zeta,\eta)\right]=-p_2(x,y) \tag{1b}$$

$$\frac{\mu}{2\pi(\kappa+1)}\fint_S\frac{2w}{r_1^3}ds(\zeta,\eta)=-p_3(x,y) \tag{1c}$$

式中:x,y,z:载荷作用坐标系;u,v,w:裂纹面的位移间断;ζ,η:所求裂纹表面位移的局部坐标系;p_1,p_2,p_3:分别作用在裂纹 x,y,z 方向的载荷;符号$\fint$表示有限部积分[2];$r_1\ \sqrt{(x-\zeta)^2+(y-\eta)^2}$;其他符号请参见文献[1].

如引入记号:

$$A=\frac{1}{r_1^3}\begin{bmatrix}\kappa-1+\frac{3(3-\kappa)(x-\zeta)^2}{2r_1^2} & \frac{3(3-\kappa)(x-\zeta)(y-\eta)}{2r_1^2} & 0\\ \frac{3(3-\kappa)(x-\zeta)(y-\eta)}{2r_1^2} & \kappa-1+\frac{3(3-\kappa)(x-\zeta)^2}{2r_1^2} & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$U=\frac{\mu}{\kappa+1}\begin{Bmatrix}u\\ v\\ w\end{Bmatrix}\qquad p=\begin{Bmatrix}2\pi p_1\\ 2\pi p_2\\ 2\pi p_3\end{Bmatrix}$$

则式(1)可写成:

$$\fint_S A(P,Q)U(Q)ds(\zeta,\eta)=p(P) \tag{2}$$

收稿日期:2004－12－18

作者简介:朱成九(1960－),男,江西景德镇人,副教授.

式中，$P(x,y)$表示源点，$Q(\zeta,\eta)$表示被积分点，点 P，Q 都遍及整个裂纹面．为方便起见，仍然将 U 称为位移间断．

2　超奇异积分方程组的离散化

对于取定的源点 P，将整个裂纹面进行网格划分，离散为 M 个单元（包括三角形单元和四边形单元），式(2)变为：

$$\sum_{j=1}^{M}\fint_{s_j}A(P,Q)\,U(Q)\,DS(Q)=p(P) \tag{3}$$

若取线性插值，单元内任意一点 Q 的位移间断为

$$U=\sum_{i=1}^{3}N^iU^i \tag{4}$$

并将此式代入，得：$\sum_{j=1}^{M}\fint_{s_j}A(P,Q)\left(\sum_{i=1}^{m}N^iU^i\right)ds(Q)=p(P)$　　(5)

其中：s_j 为三角形单元时，$m=3$；s_j 为四边形单元时，$m=4$．

将每个单元进行处理后，可得到影响系数矩阵$[\mathrm{A}^n]_{1\times N}$，以 n_p 表示节点 P 对应的节点总体编号，式(3)变成：$[\mathrm{A}^n]_{1\times N}\{U^n\}_{N\times1}=p^{n_p}$，$n=1,2,\cdots,N$　　(6)

每个节点依次取作源点，列出与式(6)相似的方程，可得到 N 个以节点位移间断为未知数的代数方程组，即：

$$[\mathrm{A}^n]_{N\times N}\{U^n\}_{N\times1}=\{p^{n_p}\}_{N\times1},\ n,n_p=1,2,\cdots,N \tag{7}$$

考虑边界条件和物理约束条件后，该方程组可求解个未知量．

3　应力强度因子计算公式

根据前面所述的超奇异积分方程的求解，可以得到方程组(7)的系数矩阵，即可获得方程组的解即每个节点的位移间断 U．由此就可计算裂纹周边的应力强度因子 K_I，K_{II}和K_{III}．本文采用位移间断外推法计算应力强度因子．

根据文献[2,3]，Q 点的应力强度因子计算公式为：

$$K_I(Q)=\frac{\mu}{\kappa+1}\lim_{X_n\to0}u_z(X_n)\sqrt{\frac{2}{X_n}}=\lim_{X_n\to0}u'_z(X_n)\sqrt{\frac{2}{X_n}} \tag{8a}$$

$$K_{II}(Q)=\frac{\mu}{\kappa+1}\lim_{X_n\to0}u_n(X_n)\sqrt{\frac{2}{X_n}}=\lim_{X_n\to0}u'_n(X_n)\sqrt{\frac{2}{X_n}} \tag{8b}$$

$$K_{III}(Q)=\frac{\mu}{\kappa+1}\lim_{X_n\to0}\frac{1}{4}(\kappa+1)\,u_r(X_n)\sqrt{\frac{2}{X_n}}=\lim_{X_n\to0}\frac{1}{4}(\kappa+1)\,u'_\tau(X_n)\sqrt{\frac{2}{X_n}} \tag{8c}$$

因此，裂纹边缘上任一点 Q 处的应力强度因子可以沿 X_n 的距离外推到 Q 点获得．

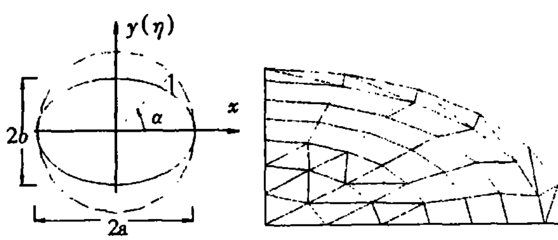
一般而言裂纹的应力强度因子的数值计算结果都是用无量纲形式来表示：

$$F_I=\frac{K_I}{p\sqrt{b}},\ F_{II}=\frac{K_{II}}{p\sqrt{b}},\ F_{III}=\frac{K_{III}}{p\sqrt{b}} \tag{9}$$

式中，p 为作用在裂纹面上的力，b 是裂纹的特征尺寸．

4　算例：椭圆裂纹

椭圆裂纹的形状和尺寸如图 1a 所示，分别为椭圆的长轴和短轴．将椭圆划分为若干个三角形单元和四边形单元．由于问题的需要，将边界层也划分为三角形单元．由于其对称性，图 1b 只给出了四分之一椭圆的单元划分网格图，采用 145 个节点，192 个单元进行数值计算．



(a)　　(b)

图 1

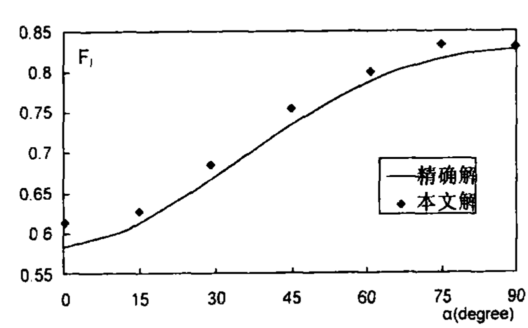


图 2　a/b＝2 时随圆裂纹的无量纲应力强度因子

在椭圆裂纹的上下表面作用大小相等方向相反的均布载荷，即 $p_3(x,y)=p_0$. 此时裂纹前沿为 I 型断裂状态，裂纹面上只有法向位移间断. 利用上述方法可得到椭圆裂纹前沿各点的无量纲应力强度因子 F_1. 另外，我们已知椭圆裂纹前沿 F_1 的解析式为

$$F_I=\frac{[1-k^2\cos^2\alpha]^{1/4}}{E(k)} \tag{10}$$

式中，$k^2=1-(b/a)^2$；$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\alpha+(b/a)^2\cos^2\alpha)^{1/2})d\alpha$.

而图2给出了 $a/b=2$ 时，椭圆裂纹前沿无量纲应力强度因子随参考角变化及其理论解的曲线. 由图上可以看出本文的结果与理论解非常的接近. 最大误差(+4.93%)发生在椭圆长轴端点0°的地方.

5 结束语

本文对超奇异积分的处理方法做了详细的介绍，用有限部积分原理和边界元法数值求解超奇异积分方程组，计算了三维裂纹的应力强度因子. 通过算例，可以看出所得的结果与其他文献非常的接近，说明了本文的方法是有效的.

参考文献：

[1] 陈梦成，野田尚昭. 三次元异种接合弹性体中に存在する微小き裂による 力场(1，き裂の同一领域). 机械の研究，2003，55(5)：567－578.

[2] 秦太验. 三维断裂力学的有限部积分－边界元法研究[D]. 上海交通大学博士论文，1993.

[3] 陈梦成. 两相材料界面附近(含界面)三维断裂力学问题的超奇异积分方程方法[D]. 上海交通大学博士论文，1997.

[4] 余会琴. 滚动载荷作用下半空间表面裂纹的分析[D]. 华东交通大学硕士论文，2004.

3D Crack Analysis in Infinite Elastic Body

ZHU Cheng-jiu，CHEN Meng-cheng，YU Hui-qin

(School of Civil Engineering and Architecture，East China Jiaotong University，Nanchang 330013，China)

Abstract：In this paper finite－part integrals in conjunction with boundary element method are used to analyze stress intensity factors for three-dimensional crack problems in Infinite Elastic Body. In numerical calculations，triangular and quadrilateral elements are employed.

Key words：3D Crack；finite-part integrals；boundary element method；stress intensity factors