

文章编号: 1005—0523(2005)05—0133—02

关于奇完全数的几个定理

周尚超

(华东交通大学, 江西 南昌 330013)

摘要:给出了奇完全数的最大素因子的一个必要条件和奇完全数的素因子个数的一个算法.

关 键 词:奇完全数; 素数; 积性函数

中图分类号: O157.1

文献标识码: A

用 $s(m)$ 表示正整数 m 的正因子 (含 1 和 m) 的和. 如果 $s(m) = 2m$, 则称 m 是完全数. 例如 6 和 28 都是完全数. 目前已知 m 是偶完全数的充分必要条件是 $m = 2^{p-1}(2^p - 1)$ [1], 且 $2^p - 1$ 是素数. 至今尚未发现有奇完全数存在. 是否存在奇完全数是数论中的一大难题. Hagis 和 Chein 曾经独立证明: 奇完全数至少可以被 8 个互异素数除尽 [2], 奇完全数必有一个大于 100 110 的素因数 [1]. 至今已有许多这方面的结果. 设 p 是素数, $f(p)$ 表示最小素因数为 p 的奇完全数的互异素因数个数的最小值. 如果 m 与 n 互素, 则 $s(m * n) = s(m) * s(n)$; 即 s 是一个积性函数. 设 $m = p_1^{t_1} * p_2^{t_2} * \dots * p_n^{t_n}$

p_i 为素数, 且 $p_1 < p_2 < \dots < p_n$. 则 $s(p_1^{t_1} * p_2^{t_2} * \dots * p_n^{t_n}) = s(p_1^{t_1}) * s(p_2^{t_2}) * \dots * s(p_n^{t_n})$. 如果 $m = p_1^{t_1} * p_2^{t_2} * \dots * p_n^{t_n}$ 是完全数, 则称 $p_i^{t_i}$ 是完全数的构成元素, 简称构成元素. $p_1^{t_1}$ 称为最小元素, $p_n^{t_n}$ 称为最大元素.

引理 1 设 p 是素数则 $s(p^t) = 1 + p + p^2 + \dots + p^t$ 不能被 p 整除

引理 2 设 p 是素数 $r = s(p^t)/p^t$, 则 $(p+1)/p < r < p/(p-1)$

证明 $r = (1 + p + p^2 + \dots + p^t)/p^t$
 $= (1/(p^t - 1) + \dots + 1 + p)/p > (1 + p)/p$

$$r = (p(t+1) - 1) / ((p-1)p^t) \\ = (p - 1/(p^t)) / (p-1) < p/(p-1)$$

引理 3 设 $m = p_1^{t_1} * p_2^{t_2} * \dots * p_n^{t_n}$, $r = s(m)/m$ 则

$$r < (p_1/(p_1-1))(p_2/(p_2-1)) \dots (p_t/(p_t-1))$$

引理 4 若 p, q 是素数 $r = s(p^t)/p^t$, $s = s(q^n)/q^n$, $p < q$ 则 $r > s$

根据引理 3, 4 如果知道了最小素因子, 我们可以计算出一个奇完全数至少要有多少个不同的素数因子.

例 1 设 $p=5$ 是奇完全数 m 的最小素因子, 则 m 至少要有 7 个不同的素因子. 如果 m 只有 6 个素因子, 则

$$s(m)/m < (5/4)(7/6)(11/10)(13/12)(17/16)(19/18) < 2$$

如 $p=541$ 是奇完全数 m 的最小素因子, 则 m 至少要有 26308 个不同的素数因子.

因此, 计算最少素因子个数的算法是: 设 p 是奇完全数 m 的最小素因子.

- 1) $d=1; f=0$; // f 为最少素因子个数
- 2) $d * = p/(p-1)$;
- 3) $f++$;
- 4) $p=q$, q 是恰比 p 大的素数
- 5) 如 $d > 2$ 停止, 否则转向 2)

收稿日期: 2005—07—20

基金项目: 江西省自然科学基金项目 (511016)

作者简介: 周尚超 (1948—), 男, 云南蒙自人, 教授.

中国知网 <https://www.cnki.net>

根据此算法,算出当 p 为最小的 80 个素数时的 $f(p)$.

表 1 最小素因子为 p 的完全数的素因子个数的下界 $f(p)$

p	$f(p)$	p	$f(p)$	p	$f(p)$
5:	7;	7:	15;	11:	27
13:	41;	17:	62;	19:	85
23:	115;	29:	150;	31:	186
37:	229;	41:	274;	43:	323
47:	380;	53:	443;	59:	509
61:	577;	67:	653;	71:	733
73:	818;	79:	912;	83:	1010
89:	1114;	97:	1222;	101:	1331
103:	1448;	107:	1572;	109:	1704
113:	1845;	127:	1994;	131:	2138
137:	2289;	139:	2445;	149:	2609
151:	2774;	157:	2948;	163:	3127
167:	3311;	173:	3502;	179:	3699
181:	3900;	191:	4112;	193:	4324
197:	4546;	199:	4775;	211:	5016
223:	5255;	227:	5493;	229:	5738
233:	5993;	239:	6255;	241:	6524
251:	6804;	257:	7084;	263:	7371
269:	7663;	271:	7961;	277:	8270
281:	8585;	283:	8909;	293:	9243

定理 1 设 m 是奇完全数

$$m=p^1t^1 * p^2t^2 \cdots p^np^n, p^1 < p^2 < \cdots < p^n$$

则 $s(p^n t^n)$ 的素因子 $< p$

证明
$$s(m)=s(p^1t^1)s(p^2t^2) \cdots s(p^nt^n)$$
$$=2p^1t^1 * p^2t^2 \cdots p^nt^n$$

若 q 是 $s(p^n t^n)$ 的素因子则 q 是 $2, p^1, p^2, \cdots, p^n$ 之一,由引理

q 不能是 p , 因此 $q < p$.

定义 如果 $s(p^n)$ 的素因子 $< p$, 则称 p^n 满足最大条件.

我们对小于 100000000 的素数进行计算. 得到下列结果.

- 1) 设 $p < 100000000, p^{10}$ 不满足最大条件.
- 2) 设 $p < 100000000, p^8$ 满足最大条件, 则 p 是以下 7 个之一: 4793687, 17040703, 18065111, 32997269, 40236011, 42502693, 54158833.
- 3) 设 $p \leq 133105747, p^6$ 满足最大条件. 则 p 是下面 87 个数之一

493397 4538603 6450307 6602399

7144363	8233787	8693947	8837557
11041819	12460403	14830391	18913991
22444277	22951283	23150119	25032031
29609431	31029787	31307207	31839151
32244859	33804481	37620101	38475977
39434663	39890003	40178219	41442329
41981081	42075751	42560369	44316197
47971057	49854929	50058647	50837341
51418093	51706331	55067269	55739507
59329663	59903947	61762193	61964431
66606157	68113807	72331219	74306809
75682331	75790223	76085351	77118799
77827181	78106307	85891943	87885949
88761593	90107203	92892127	93058573
95303477	95709899	96397919	97023863
97073359	97185839	97330193	97330283
99129991	105077857	105130019	107312423
109276291	109374983	110594881	114516943
114824167	115209683	115734967	118695023
122299607	123520021	127227713	128533931
128582833	131595413	133105747	

平均 86710 个素数中有一个 p 使 p^6 满足最大条件

4) 在小于 133105747 的 2187400 个素数中, 有 7537 个素数 p , 使 p^4 满足最大条件, 这些数中最小的 10 个是: 7307, 9769, 16631, 26293, 28759, 28771, 36061, 38351, 41201, 51637.

这些数中最大的 10 个是 35645989, 35646971, 35649997, 35663669, 35670059, 35672453, 35689361, 35703259, 35705531, 35706653.

占 2187400 个素数中的 290 分之一. 根据以上计算我们有如下定理

定理 2 1) 若 p^{10} 是奇完全数的最大元素, 则 $p > 100000000$

2) 若 p^8 是奇完全数的最大元素, 则 $p > 4793687$

3) 若 p^6 是奇完全数的最大元素, 则 $p > 493397$

参考文献:

[1] 华罗庚. 数论导引[M]. 北京: 科学出版社, 1979.
[2] Hagis P. Every odd perfect number has at least 8 prime factors [J]. Notices Amer Math Soc. 1975(22): 60.
[3] 亲和数的若干性质与 10 对亲和数[J]. 华东交通大学学报, 2000(3): 68—70.

Some Theroms of Odd Perfect Number

ZHOU Shang-chao

(East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Let $s(m)=\sum_{d|m}d$. The following results have been proved: 1) Suppose $m=p^1t^1 * p^2t^2 \cdots p^nt^n$ is an odd perfect number. q is a prime factor of $s(p^n t^n)$ then $q < p^n$. 2) gave a logarithm on prime factors of odd perfect number.

Key words: odd perfect number; prime number; multiplicative function