第 22 卷第 5 期
2005 年 10 月

华 东 交 通 大 学 学 报
Journal of East China Jiaotong University

Vol.22 No.5
Oct., 2005

文章编号:1005－0523(2005)05－0135－03

图的符号圈控制

徐保根

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:文[1～2]中引入了图的两种边控制概念,即符号边控制和符号星控制.本文引入了图的符号圈控制概念,得到了符号圈控制数的下界,并确定了几类特殊图的符号圈控制数.

关 键 词:符号圈控制函数;符号圈控制数;轮图;极大平面图

中图分类号:O157.5 **文献标识码**:A

1 引 言

本文所指的图均为无向简单图,文中未说明的符号和术语同于文献[3].

设 G 是一个图,$V(G)$ 和 $E(G)$ 分别为图 G 的顶点集和边集.若 $v\in V(G)$,则 $N_G(v)$ 表示 v 点在 G 中的邻域,$N_G[v]=N_G(v)\cup\{v\}$ 表示 v 点在 G 中的闭邻域,$d_G(v)=|N_G(v)|$ 为 v 点在 G 中度.为了方便,有时将 $N_G(v)$、$N_G[v]$ 和 $d_G(v)$ 分别简记为 $N(v)$、$N[v]$ 和 $d(v)$.若 $S\subseteq V(G)$,则 $G[S]$ 表示 S 在 G 中的导出子图.若 C 为图 G 中长度不小于 4 的一个圈,u 和 v 为在 C 中两个不邻的顶点,如果 $uv\in E(G)$ 则称 uv 为圈 C 的一条弦.图 G 的一个圈 C 是无弦的当且仅当 $G[V(C)]=C$.在本文中 P_n、C_n、K_n 和 W_n 分别表示 n 阶路、圈、完全图和轮图 $K_{m,n}$,为完全二部图,Cartesian 积 $P_m\times P_n$ 称为 $m\times n$ 格图.

近几年来,图的控制理论研究的内容越来越广泛,各类控制概念相继产生且研究成果不断丰富,T.W.Haynes 等人的两部专著[4～5]综述了近几些年来图的控制理论研究方面的主要研究成果.然而,它们绝大多数均属于图的点控制,很少涉及到关于图的边控制问题和结果.我们在文[1～2]中分别引入了图的两种边控制概念,即符号边控制和符号星控制概念,并获得了较多的研究成果.本文中我们又引入了图的另一种边控制概念,即图的符号圈控制概念如下:

定义 设 $G=(V,E)$ 是一个图,一个函数 $f:E\to\{+1,-1\}$ 如果满足 $\sum_{e\in E(C)}f(e)\geqslant 1$ 对 G 中每一个无弦的圈 C 均成立,则称 f 为图 G 的一个符号圈控制函数.图 G 的符号圈控制数定义为 $\gamma'_{SC}(G)=\min\{\sum_{e\in E(G)}f(e)\mid f$ 为 G 的符号圈控制函数$\}$.并且对于空图 $G=\overline{K_n}$ 则定义 $\gamma'_{sc}(G)=0$.

由定义可知,对任意图 G,均有 $|E(G)|\geq\gamma'_{sc}(G)\geq -|E(G)|$ 成立,且 $\gamma'_{sc}(G)=-|E(G)|$ 当且仅当 G 为一个无圈图(树或森林).对于两个点不相交的图 G_1 和 G_2,显然有 $\gamma'_{sc}(G_1\cup G_2)=\gamma'_{sc}(G_1)+\gamma'_{sc}(G_2)$.本文给出图的符号圈控制数的若干下界,并确定几类特殊图的符号圈控制数.

2 主要结果

首先我们给出几类特殊图的符号圈控制数.

收稿日期:2005－05－26

基金项目:江西省自然科学基金项目(511016);华东交通大学科技基金项目。

作者简介:徐保根(1963－),男,江西南昌人,教授.

定理 1 设 n 和 m 均为整数，且 $n\geq 3$、$m\geq 2$，则

(1) $\gamma_{sc}^{'}(K_n)=\frac{n(n-1)}{2}-2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$；

(2) $\gamma_{sc}^{'}(K_{m,n})=mn-2$；

(3) $\gamma_{sc}^{'}(C_n)=\begin{cases}1 & \text{当 } n \text{ 为奇数时；}\\ 2 & \text{当 } n \text{ 为偶数时；}\end{cases}$

(4)对任意树 T，均有 $\gamma_{sc}^{'}(T)=-|E(T)|$；

证明 由于 $n\geq 3$，对于完全图 K_n 的任何一个符号圈控制函数f，使得 $f(e)=-1$ 的边 e 至多只有 $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ 条(否则与定义矛盾)，即为 K_n 中的独立边．由于 $n\geqslant 3$、$m\geqslant 2$，而对于完全二部图 $K_{m,n}$的任何一个符号圈控制函数 f，使得 $f(e)=-1$ 的边 e 至多只有一条，可见(1)和(2)成立．由定义知(3)(4)显然．

定理 2 对于任意 n 阶图 G，均有 $\gamma_{sc}^{'}(G)\geq 1-n$，

当且仅当 G 为树时等式成立．

证明 若图 G 中无圈；则 G 为树或森林，显然有 $\gamma_{sc}^{'}(G)\geq-|E(G)|\geq 1-n$．

若图 G 中有圈；，则 G 中必有无弦的圈．设 G 中(至多)共有 t 个边不相交的无弦圈，分别记为 $C^1,C^2,\cdots,C^t$．令 $T=G-\bigcup_{i=1}^{t}E(C^i)$，可见 T 为无圈图(树或森林)，即 $|E(T)|\leq n-1$．设 f 为 G 的一个符号圈控制函数使得 $\gamma_{sc}^{'}(G)=\sum_{e\in E(G)}f(e)$，由定义知：对于每一个无弦圈 $C^i(1\leq i\leq t)$，均有 $\sum_{e\in E(C^i)}f(e)\geq 1$，从而 $\gamma_{sc}^{'}(G)=\sum_{e\in E(G)}f(e)=\sum_{e\in E(t)}f(e)+\sum_{i=1}^{t}\sum_{e\in E(C^i)}f(e)\geq-|E(T)|+t\geq 1-n+t\geq 1-n$，当且仅当 G 为树时($t=0$)定理 2 中等式成立，证毕．

如果一个平面图 G 的每个面(包括外部面)的边界均为三角形，则 G 称为极大平面图．

引理 3 [3]设整数 $n\geq 3$，则每个 n 阶极大平面图有 $2n-4$ 个面(包括外部面)．

定理 4 对于任意 n 阶极大平面图 $G(n\geq 3)$，均有 $\gamma_{sc}^{'}(G)\geq n-2$．

证明 将图 G 嵌入平面内，由引理 3 知图 G 共有 $2n-4$ 个面(包括外部面)，分别记为 $F_1,F_2,\cdots,F_{2n-4}$，令 $C(F_i)$表示面 F_i 的边界三角形的三条边集($1\leq i\leq 2n-4$)．设 f 为 G 的一个符号圈控制函数使得 $\gamma_{sc}^{'}(G)=\sum_{e\in E(G)}f(e)$．由定义知：对每个 $C(F_i)$均有 $\sum_{e\in C(F_i)}f(e)\geq 1$，从而 $2\gamma_{sc}^{'}(G)=\sum_{i=1}^{2n-4}\sum_{e\in C(F_i)}f(e)\geq 2n-4$，即 $\gamma_{sc}(G)\geq n-2$．定理 4 证毕．

为了说明定理 4 给出的下界是最好可能的，下面我们给出一类极大平面图使其等式成立．

令 $G_1=K_3$，G_2 表示 G_1 的内部面上取一点邻接 G_1 的 3 个顶点所得的图，由此类推，G_m 表示 G_{m-1} 的任意一个内部面 F 上取一点邻接F 的边界上的 3 个顶点所得的图(注意到 F 的边界为三角形)．显然，它们均为极大平面图，且$|V(G_m)|=m+2$．

定理 5 令 $M=\{G_1,G_2,\cdots,G_m,\cdots\cdots,\}$则对于 M 中的任意一个 n 阶图 G，均有 $\gamma_{sc}^{'}(G)=n-2$

证明 根据定理 4 得知 $\gamma_{sc}^{'}(G)\geq n-2$．下面证明 $\gamma_{sc}^{'}(G)\leq n-2$，即证命题：

对 M 中任意 n 阶(极大平面)图 $G(n\geq 3)$，存在一个符号圈控制函数 f 使得 $\sum_{e\in E(G)}f(e)\leq n-2$．

对 n 用归纳法：当 $n=3$ 时 $G=K_3$，对 G 的三条边定义f 的值分别为 1、1 和－1，命题成立．若命题对于 M 中所有 $n-1$ 阶图成立，现考虑 M 中一个 n 阶图 $G(n\geq 4)$，由定义知 G 的内部有 3 度顶点，取 υ 为 G 的一个内部的 3 度顶点，使得 $H=G-\upsilon\in M$，由归纳假设知：存在图 H 一个符号圈控制函数 f_1 使得 $\sum_{e\in E(H)}f_1(e)\leq(n-1)-2=n-3$．令 $S=N_G(\upsilon)=\{u_1,u_2,u_3\}$，由于 $H[S]=K_3$，其 3 条边在 f_1 下的值至多有一个(否则与符号圈控制函数的定义矛盾)，不妨设 $f_1(u_1u_2)=-1$，则 $f_1(u_1u_3)=f_1(u_2u_3)=1$．定义图 G 的一个符号圈控制函数f：

$$f(e)=\begin{cases}f_1(e) & \text{当 } e\in E(H)\text{时；}\\ 1 & \text{当 } e\in\{u_1\upsilon,u_2\upsilon\}\text{时；}\\ -1 & \text{当 } e=u_3\upsilon\text{ 时；}\end{cases}$$

可见 $\sum_{e\in E(G)}f(e)=2-1+\sum_{e\in E(H)}f(e)\leq n-2$．所以命题成立，定理 5 证毕．

定理 6 设整数 $n\geq 3$，则 $n+1$ 阶轮图的符号圈控制数

$$\gamma_{sc}^{'}(W_{n+1})=2\left[\frac{n}{4}\right]+2$$

其中[x]表示不超过 x 的最大整数．

证明 设 f 为图 G 的一个符号圈控制函数且使得 $\gamma_{sc}^{'}(W_{n+1})=\sum_{e\in E(W_{n+1})}f(e)$，将 W_{n+1}分拆成一个 n 阶圈 C_n 和一个阶星 S_{n+1}，即 $E(W_{n+1})=E(C_n)\cup E(S_{n+1})$．

为了方便，称 $f(e)=1$ 的边为＋1 边，称 $f(e)=-1$ 的边为－1 边．

设 C_n 上共有 t 条边，则 $t\leq\left[\frac{n-1}{2}\right]$，$S_{n+1}$上至少有 $t+1$ 条边与这 t 条边相关联，这些必须为＋1

边,S_{n+1}上其余(至多 $n-t-1$ 条)边至多有 $\left[\frac{n-t-1}{2}\right]$ 条-1边.

因此,W_{n+1}上-1边至多有 $t+\left[\frac{n-t-1}{2}\right]=\left[\frac{n+t-1}{2}\right]$ 条,$+1$边至少有 $2n-\left[\frac{n+t-1}{2}\right]$ 条,即 $\gamma_{sc}'(W_{n+1})\geq 2n-2\left[\frac{n+t-1}{2}\right]\geq n-t+1\geq n-\left[\frac{n-1}{2}\right]+1\geq 2\left[\frac{n}{4}\right]+\frac{3}{2}$,注意到 $\gamma_{sc}'(W_{n+1})$为整数,故 $\gamma_{sc}'(W_{n+1})\geq 2\left[\frac{n}{4}\right]+2$　　(*)

下面分四种情况定义 W_{n+1}的一个符号圈控制函数 f:

设 W_{n+1}的中心点为 u,圈 C_n 上的顶点依次为 v_1、v_2、…,v_n.

(1)当 $n=4k$ 时;令 $f(v_iv_{i+1})=-1(1\leq i\leq 2k-1)$,$f(uv_{2k+2j-1})=-1(1\leq j\leq k)$,而其余的每条边 e,令 $f(e)=1$.

(2)当 $n=4k+1$ 时;令 $f(v_iv_{i+1})=-1(1\leq i\leq 2k)$,$f(uv_{2k+2j})=-1(1\leq j\leq k)$,而其余的每条边 e,令 $f(e)=1$.

(3)当 $n=4k+2$ 时;令 $f(v_iv_{i+1})=-1(\leq i\leq 2k)$,$f(uv_{2k+2j})=-1(1\leq j\leq k+1)$,而其余的每条边 e,令 $f(e)=1$.

(4)当 $n=4k+3$ 时;$f(v_iv_{i+1})=-1(1\leq i\leq 2k+1)$,$f(uv_{2k+2j+1})=-1(1\leq j\leq k+1)$,而其余的每条边 e,令 $f(e)=1$.

不难验证:对上述每种情况均有 $\sum_{e\in E}f(e)=2k+2=2\left[\frac{n}{4}\right]+2$,这里 $E=W(W_{n+1}$.故 $\gamma_{sc}'(W_{n+1})\leq 2\left[\frac{n}{4}\right]+2$.结合(*)式,定理6证毕.

参考文献:

[1] Baogen Xu, On signed edge domination numbers of graphs [J]. *Discrete Math*. 239 (2001), 179~189.

[2] Baogen Xu, On edge domination numbers of graphs[J]. *Discrete Math*. 294 (2005), 311~316.

[3] F.哈拉里,图论[M].上海科技出版社,1980.

[4] T.W.Haynes, S. T.Hedetniemi, and P.J.Slater, Domination in graphs[M]. New York, 1998.

[5] T.W.Haynes, S.T.Hedetniemi, and P.J.Slater, Fundamentals of domination in graphs[M]. New York, 1998.

The Signed Cycle Domination in Graphs

XU Bao-gen

(School of Natural Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract:The concept of two classes of edge domination was introduced in [1~2],that is, the signed edge domination and signed star domination. In this paper we introduce the concept of the signed cycle domination, obtain a lower bound for the signed cycle domination numbers of graphs, and determine the signed cycle domination numbers for several classes of graphs.

Key words: signed cycle domination function; signed cycle domination number; wheel; maximal planar graph