文章编号:1005－0523(2005)05－0138－04

一类洛伦兹流形的 2－调和类空超曲面的一个拼挤定理

吴泽九

(华东交通大学 基础科学学院, 江西 南昌 330013)

摘要:研究局部对称共形平坦洛伦兹流形中的 2－调和类空超曲面,得到它对外围空间的一个拼挤定理.

关 键 词:局部对称;共形平坦;2－调和;拼挤

中图分类号:O186 **文献标识码**:A

1 引言和主要结果

设 N_1^{n+1} 表示 $n+1$ 维局部对称共形平坦洛伦兹流形,$f: M^n \to N_1^{n+1}$ 是 n 维黎曼流形 M^n 到 N_1^{n+1} 的等距浸入.若 f 是 2－调和映照[2],称 M^n 是 N_1^{n+1} 中的 2－调和类空超曲面.

文[1,2]分别讨论了黎曼流形和伪黎曼流形中的 2－调和子流形,给出 2－调和子流形满足的条件.利用这些条件,文[3,4]分别得到常曲率空间中紧致的 2－调和超曲面的拼挤定理.本文考虑局部对称共形平坦洛伦兹流形中的 2－调和超曲面,讨论这类超曲面对外围空间的拼挤问题,得到

定理 1 设 M^n 是局部对称共形平坦洛伦兹流形 N_1^{n+1} 的紧致的 2－调和类空超曲面,S 与 H 分别表示 M^n 的第二基本形式模长的平方与 M^n 的平均曲率,R 与 r 分别表示 N_1^{n+1} 的 Ricci 曲率的上、下确界.若 M^n 的法向量是 N_1^{n+1} 的 Ricci 主方向且

$$-r \leqslant S \leqslant \frac{n^3}{4(n-1)} H^2 - \frac{2n+1}{n-1}(R-r) \tag{1.1}$$

则

$$S = -r \text{ 或 } S = \frac{n^3}{4(n-1)} H^2 - \frac{2n+1}{n-1}(R-r) \tag{1.2}$$

当 N_1^{n+1} 为常截面曲率 c 的 de Sitter 空间 $S_1^{n+1}(c)$ 时,显然 M^n 的法向量是 N_1^{n+1} 的 Ricci 主方向,且 $R=r=nc>0$,由定理 1 得

推论 1 设 M^n 是 de Sitter 空间 $S_1^{n+1}(c)$ 中紧致的 2－调和类空超曲面,S 与 H 分别表示 M^n 的第二基本形式模长的平方与 M^n 的平均曲率.若 $S \leqslant \frac{n^3}{4(n-1)} H^2$,则 $S = \frac{n^3}{4(n-1)} H^2$.

注:当 $c=1$ 时,推论 1 即为文[4]中的定理 2.

当 N_1^{n+1} 是截面曲率为 $-c(c>0)$ 的反 de Sitter 空间 $H_1^{n+1}(-c)$ 时,M^n 的法方向也是 N_1^{n+1} 的 Ricci 主方向,且 $R=r=-nc$.由定理 1 得

收稿日期:2005－03－07

作者简介:吴泽九(1976－),男,江西会昌人,讲师.

推论 2　设 M^n 是截面曲率为 $-C(C>0)$ 的反 de Sitter 空间 $H_1^{n+1}(-c)$ 中紧致的 2－调和类空超曲面，S 与 H 分别表示 M^n 的第二基本形式模长的平方与 M^n 的平均曲率．若 $nc\leqslant S\leqslant\frac{n^3}{4(n-1)}H^2$，则 $S=nc$ 或 $S=\frac{n^3}{4(n-1)}H^2$．

2　预备知识

设 N_1^{n+1} 表示 $n+1$ 维局部对称共形平坦洛伦兹流形，M^n 是 N_1^{n+1} 的 n 维 2－调和类空超曲面．本文对各种指标范围规定如下：

$1\leqslant A,B,C,D,E\cdots\leqslant n+1$；$1\leqslant i,j,k,l,m\cdots\leqslant n$；不特别声明时，$\sum$ 表示对重复指标求和．在 N_1^{n+1} 上选取局部标准正交标架场 $\{e_A\}$，使得限制在 M^n 上，$\{e_i\}$ 与 M^n 相切．设 $\{\omega_A\}$ 是 $\{e_A\}$ 的对偶标架场，$\{\omega_{AB}\}$ 是 N_1^{n+1} 的联络形式．$ds^2=\sum\varepsilon_A(\omega_A)^2$，其中 $\varepsilon_i=1$，$\varepsilon_{n+1}=1$．将这些形式限制在 M^n 上，且为了方便简记 $h_{ij}^{n+1}=h_{ij}$，则有

$$\omega_{n+1}=0,\ \omega_{in+1}=\sum h_{ij}\omega_j,\ h_{ij}=h_{ji} \tag{2.1}$$

$$\eta=-\sum h_{ij}\omega_i\omega_j e_{n+1},\ h=-\frac{1}{n}\sum h_{ii}e_{n+1} \tag{2.2}$$

$$R_{ijkl}=K_{ijkl}-\sum(h_{ik}h_{jl}-h_{il}h_{jk}) \tag{2.3}$$

其中 η,h,R_{ijkl},K_{ijkl} 分别表示 M^n 的第二基本形式、平均曲率向量、曲率张量的分量和 N_1^{n+1} 的曲率张量的分量．定义 $S=\|\eta\|^2$，$H=\|h\|$．若 $H=0$，称 M^n 为极大的．跟随[5]，定义 h_{ijk} 及 h_{ijkl} 分别为 h_{ij} 的共变导数，则有

$$h_{ijk}-h_{ikj}=K_{n+1ijk} \tag{2.4}$$

$$h_{ijkl}-h_{ijlk}=\sum h_{mi}R_{mjkl}+\sum h_{mj}R_{mikl} \tag{2.5}$$

将 K_{n+1ijk} 看作是 $T\perp M\otimes T^*M\otimes T^*M\otimes T^*M$ 的截面的分量，定义 $K_{n+1ijkl}$ 为它的共变导数的分量：

$$\sum K_{n+1ijkl}\omega_1=dK_{n+1ijk}-\sum K_{n+1mjk}\omega_{mi}-\sum K_{n+1imk}\omega_{mj}-\sum K_{n+1ijm}\omega_{mk} \tag{2.6}$$

K_{ABCD} 的共变导数 $K_{ABCD,E}$，限制在 M^n 上有

$$K_{n+1ijk,l}=K_{n+1ijk}+K_{n+1in+1k}h_{il}+K_{n+1ijn+1}h_{kl}+K_{mijk}h_{ml} \tag{2.7}$$

N_1^{n+1} 为局部对称的，即

$$K_{ABCD,E}=0 \tag{2.8}$$

N_1^{n+1} 是共形平坦的，所以

$$K_{ABCD}=\frac{1}{n-1}(\varepsilon_A\delta_{AC}K_{BD}-\varepsilon_A\delta_{AD}K_{BC}++\varepsilon_B\delta_{BD}K_{AC}-\varepsilon_B\delta_{BC}K_{AD})-\frac{K}{n(n-1)}\varepsilon_A\varepsilon_B(\delta_{AC}\delta_{BD}-\delta_{AD}\delta_{BC}) \tag{2.9}$$

其中 $K_{AC}=\sum\varepsilon_B K_{ABCB}$ 是 Ricci 张量的分量，$K=\sum\varepsilon_A K_{AA}$ 是数量曲率．由(2.8)知，K 是常数．

为了证明定理，需要下面引理

引理[2]　M^n 为 N_1^{n+1} 的 2－调和类空子流形的充要条件为

$$\sum(2h_{jjk}h_{kl}+h_{klk}h_{jj}-h_{jj}K_{n+1kkl})=0,\ \forall\, 1 \tag{2.10}$$

$$\sum(2h_{jjkk}+h_{jj}h_{kl}h_{lk}+h_{jj}K_{n+1kkn+1})=0 \tag{2.11}$$

注：这里的曲率算子 $K=\nabla_{[\cdot]}-[\nabla,\nabla]$，与文[2]中定义的相差一个负号．

3　定理 1 的证明

对 M^n 上任意光滑函数 f，令

$$df=\sum f_i\omega_i,\ \sum f_{ij}\omega_j=df_i-\sum f_j\omega_{ji}$$

$$\sum f_{ijk}\omega_k = df_{ij} - \sum f_{kj}\omega_{ki} - \sum f_{ik}\omega_{kj}$$

则

$$f_{ij} = f_{ji}, f_{ijk} - f_{ikj} = \sum f_m R_{mijk} \tag{3.1}$$

由于 M^n 的法向量是 N_1^{n+1} 的 Ricci 主方向，所以

$$K_{n+1i} = 0, \forall \mathrm{i} \tag{3.2}$$

根据共变微分的定义，结合(3.2)和(2.8)有

$$(K_{n+1n+1})_i = 0, \forall \mathrm{i} \tag{3.3}$$

因为 M^n 是 N_1^{n+1} 的 2一调和超曲面，由引理，(2.4)与(3.2)得

$$\sum H_k h_{kl} = -\frac{n}{2} H H_l, \forall \mathrm{l} \tag{3.4}$$

$$\triangle \mathrm{H} = H(K_{n+1n+1} - S) \tag{3.5}$$

进而

$$\frac{1}{2}\triangle \mathrm{H}^2 = |\nabla H|^2 + H^2(K_{n+1n+1} - S) \tag{3.6}$$

$$\frac{1}{4}\triangle \mathrm{H}^4 = 3H^2|\nabla H|^2 + H^4(K_{n+1n+1} - S) \tag{3.7}$$

对(3.4)两边求共变导数得

$$\sum H_{kj}h_{kl} + \sum H_k h_{klj} = -\frac{n}{2} H_j H_l - \frac{n}{2} H H_{lj} \tag{3.8}$$

应用(3.1)有

$$\frac{1}{2}\triangle(|\nabla H|^2) = \sum H_{ij}^2 + \sum H_i H_{ikk}$$
$$= \sum H_{ij}^2 + \sum H_i H_{kki} + \sum H_i H_m R_{mkik} \tag{3.9}$$

由(3.3)和(3.5)得

$$\sum H_i H_{kki} = (K_{n+1n+1} - S)|\nabla H|^2 - H\sum H_i S_i \tag{3.10}$$

由(2.3)，(2.9)与(3.4)得

$$\sum H_i H_m R_{mkik} = \sum H_i H_m K_{mkik} - \sum H_i H_m (h_{mi}h_{kk} - h_{mk}h_{ki})$$
$$= \frac{1}{n-1}[(\sum K_{ii} - \frac{n-1}{n}K)|\nabla H|^2 + (n-2)\sum H_i H_j K_{ij}] + \frac{3}{4}n^2 H^2 |\nabla H|^2 \tag{3.11}$$

设 Q 是 N_1^{n+1} 上的 Ricci 变换，$x \in M^n \subset N_1^{n+1}$，$T_x(N) = T_x(M) \oplus T_x^{\perp}(M)$，

$$Q: T_x(N) \to T_x(N), e_A \mapsto Q(e_A) = \sum Q_A^B e_B = \sum \varepsilon_B K_{AB} e_B$$

由(3.2)式，Ricci 变换 Q 所对应的矩阵(Q_A^B)为$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -K_{n+1n+1} \end{pmatrix}$，其中 A 表示 $n \times n$ 阶对称矩阵(K_{ij})，所以 $T_x(M)$是 Q 的不变子空间. 选取适当$\{e_i\}$的使得 $K_{ij} = K_{ii}\delta_{ij}$则

$$\sum H_i H_j K_{ij} = \sum H_i^2 K_{ii} \geqslant r|\nabla H|^2 \tag{3.12}$$

从而

$$\sum H_i H_m R_{mkik} \geqslant (2r - \frac{K}{n} + \frac{3}{4}n^2 H^2)|\nabla H|^2 \tag{3.13}$$

由平均值不等式和(3.5)得

$$\sum H_{ij}^2 \geqslant \sum H_{ii}^2 \geqslant \frac{1}{n}(K_{n+1n+1} - S)^2 H^2 \tag{3.14}$$

将(3.10)，(3.13) 与(3.14)代入(3.9)得

$$\frac{1}{2}\triangle(|\nabla H|^2) \geqslant \frac{1}{n}(K_{n+1n+1} - S)^2 H^2 + (K_{n+1n+1} - S)|\nabla H|^2 - H\sum H_i S_i$$
$$+ (2r - \frac{K}{n} + \frac{3}{4}n^2 H^2)|\nabla H|^2 \tag{3.15}$$

而

$$H\sum H_iS_i = \frac{1}{2}\sum(S(H^2)_i)_i - \frac{1}{2}S\triangle H^2$$

$$= \frac{1}{2}div\omega - S|\nabla H|^2 - SH^2(K_{n+1n+1} - S) \tag{3.16}$$

其中 ω 是 M^n 上以 $S(H^2)_i$ 为分量的向量场．将(3.16)代入(3.15)得

$$\frac{1}{2}\triangle(|\nabla H|^2) \geqslant \frac{1}{n}(K_{n+1n+1} - S)^2H^2 - \frac{1}{2}div\omega + SH^2(K_{n+1n+1} - S)$$

$$+(2r - R - \frac{K}{n} + \frac{3}{4}n^2H^2)|\nabla H|^2 \tag{3.17}$$

应用(3.6)与(3.7)，上式成为

$$\frac{1}{2}\triangle[|\nabla H|^2 + (\frac{K}{n} + R - 2r)H^2 - \frac{1}{8}n^2H^4] + \frac{1}{2}div\omega \geqslant \frac{n-1}{n}H^2(S - K_{n+1n+1})$$

$$[\frac{1}{n-1}(2nr - nR - K_{n+1n+1} - K + \frac{n^3}{4}H^2) - S] \tag{3.18}$$

注意到 $K = \sum K_{AA} \leqslant (n+1)R$ 及 $S - K_{n+1\,n+1} \geqslant S + r \geqslant 0$，上式推出

$$\frac{1}{2}\triangle[|\nabla H|^2 + (\frac{K}{n} + R - 2r)H^2 - \frac{1}{8}n^2H^4] + \frac{1}{2}div\omega \geqslant \frac{n-1}{n}H^2(S + r)$$

$$[\frac{n^3}{4(n-1)}H^2 + \frac{2n+1}{n-1}(r - R) - S] \tag{3.19}$$

(3.19)在 M^n 上处处成立，与标架选取无关，在条件(1.1)和 M^n 的紧致性下，利用 Bochner 技巧得

$$H = 0 \text{ 或 } S = -r \text{ 或 } S = \frac{n^3}{4(n-1)}H^2 - \frac{2n+1}{n-1}(R - r) \tag{3.20}$$

若 $H=0$，(1.1)推出 $S \leqslant \frac{2n+1}{n-1}(r-R) \leqslant 0$，因此 $S=0$，$R=r$，从而 $S = \frac{n^3}{4(n-1)}H^2 - \frac{2n+1}{n-1}(R-r)$．若 $H \neq 0$，由(3.20)，结论显然成立．定理得证．

参考文献：

[1] 姜国英．Riemann 流形间的2－调和的等距浸入[J]．数学年刊，1986，7A(2)：130－144．

[2] 欧阳崇珍．黎曼空间型的2－调和类空子流形[J]．数学年刊，2000，21A(6)：649－654．

[3] 陈建华．球面中的紧致的2－调和超曲面[J]．数学学报，1993，36(3)：341－347．

[4] 孙弘安．De Sitter 空间的2－调和类空子流形[J]．南方冶金学院学报，2000，21(2)：138－142．

[5] Ishihara T．，Maximal spacelike submanifolds of a pseudo－Riemannian Space of constant curvature[J]．Michigan Math J．1988，35(3)：345－352．

A Pinching Theorem of 2-Harmonic Spacelike Submanifolds in a Class of Lorentz Manifold

WU Ze-jiu

(School of Natural Science，East China Jiaotong University，Nanchang 330013，China)

Abstract：In this paper，we study 2-harmonic spacelike hypersurfaces in a locally symmetric and conformally flat lorentz manifold and obtain a pinching theorem of the class of hypersurfaces to the ambient manifold．

Key words：locally symmetric；conformally flat；2－harmonic；pinching