文章编号:1005－0523(2005)05－0142－02

关于更新风险模型破产概率的尾等价式的一个结果

彭 丹[1,2], 刘东海[1,2]

(1.湖南科技大学 数学与计算科学学院,湘潭 411201;2.中南大学数学 科学与计算技术学院,长沙 410075)

摘要:给出一类更新风险模型.在假定个体索赔分布是重尾前提下,当索赔分布满足一定条件时得到了与经典模型相一致的破产概率的一个尾等价关系式.

关 键 词:重尾分布;破产概率;更新风险模型

中图分类号:O211.3 **文献标识码**:A

1 模型的引入

通篇约定,对一个具有有限期望 $\mu>0$ 和分布 $F(X)=P(X\leqslant x)$ 的非负随机变量 x,其尾分布 $\overline{F}(x)=1-F(x)$,平衡分布记为 $F_e(x)=\mu^{-1}\int_0^x\overline{F}(t)dt$,所有极限过程均是对 $\mu\to\infty$ 而言.

本文根据实际情况建立风险模型.设索赔额序列 $\{Z_i,i\geqslant 1\}$ 是一列独立同分布的非负随机变量序列,具有共同的分布函数 $F(x)$ 和有限均值 μ, $\{\theta_i,i\geqslant 1\}$,是一个独立的非负随机变量序列,且与 $\{x_i,i\geqslant 1\}$ 独立, $\{\theta_i,i\geqslant k\}$ 同分布, $\theta_1,\cdots,\theta_k$ 各自服从不同分布, $T_n\sum_{i=1}^{n}\theta_i$, $i\geqslant 1$ 被称为理赔时刻序列,在时间段 $(0,t]$ 内发生的理赔次数记为 $N(t)=\max\{n\geqslant 1,T_n\in(0,t]\}$,它是一个更新过程且独立于 $\{Z_i,i\geqslant 1\}$,相应的更新风险过程定义为 $S(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}(Z_i-c\theta_i)$.这里常数是 $c(0<c<\infty)$ 保费率.

本文假定 $E\theta_{k+1}=\lambda$,假设 $\rho=\frac{cE\theta_{k+1}-EZ_{k+1}}{EZ_{k+1}}=\frac{c\lambda-\mu}{\mu}$, ρ 被称为相对安全负载条件,根据 $S(t)$,破产概率被定义为 $\psi(x)=P(\sup_{t\geqslant 0}S(t)>x)$,对 $x\geqslant 0$.它表示在假定保险公司初始资本是时无限区间上的破产概率.

2 预备知识

如果一个非负的随机变量 Z 或它的分布 $F(0,\infty]$ 使 $Ee^{tz}=\infty$ 对任何 $t>0$ 都成立,则称它的分布是重尾的.这里给出将要用到的重尾分布族的一些重要子类和结果.见[1],[2],[5].

1) $D=\{F|\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(lx)}{F(x)}<\infty$,对任何 $0<l<1$ (或等价于 $l=\frac{1}{2}$)$\}$.

2) $L=\{F|\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(x+y)}{F(x)}=1$,对任何 $y>0$(或等价于 $y=1$)$\}$.

3) $S=\{F|\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F^{n*}}(x)}{F(x)}=n$,对所有的 $n\geqslant 2$(或等价于 $n=2$)$\}$.

4) $M=\{F|\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(x)}{\int_x^\infty F(t)dt}=0\}$.

引理 2.1 假设 F 满足 $\limsup_{x\to\infty}\frac{x\overline{F}(lx)}{F_e(x)}<\infty$,对某个 $0<l<1$.

收稿日期:2004－12－18

作者简介:彭丹(1979－),女,硕士,研究方向:随机过程及其应用.

有 $F_e \in (D \cap L) \subset S$, $F \in M$.

当 F 是重尾分布时,人们已经找到了几种不同模型下破产概率的 $\psi(x)$ 尾等价公式.

引理 2.2　在经典风险模型中,假定 $\rho > 0$,则当 $F \in D$ 或 $F_e \in S$,则有 $\psi(x) \sim \rho^{-1}\overline{F_e}(x)$.

文献[4]把结果推广到普通更新风险模型中,有如下结果:

引理 2.3　在普通更新风险模型中,假定 $\rho > 0$,则当 $F \in D$ 或 $F_e \in S$,有 $\psi(x) \sim \rho^{-1}\overline{F_e}(x)$.

文献[5]进一步推广了上述结果,得到了下述结果:

引理 2.4　在普通更新风险模型中,假定 $\rho > 0$,则当 F 满足下面条件 $\lim\sup\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\overline{F}(lx)}{\overline{F_e}(x)} < \infty$,普通更新风险模型的破产概率 $\psi(x)$ 的尾等价关系 $\psi(x) \sim \rho^{-1}\overline{F_e}(x)$ 成立.

本文将[5]中结果推广到前有限次索赔时间间隔服从不同分布的风险模型中,得到了下面重要结论.

3　主要结论

定理 3.1　在本文给出的更新风险模型中,假定相对安全负载条件 $\rho > 0$,当索赔分布满足条件 $\lim\sup\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\overline{F}(lx)}{\overline{F_e}(x)} < \infty$,对某个 $l \in (0,1)$.则有破产概率 $\psi(x)$ 尾等价关系成立,即 $\psi(x) \sim \rho^{-1}\overline{F_e}(x)$.

证明　令 $\theta = \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k$, $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$.

记 $\psi^*(x)$ 为普通更新风险模型下的破产概率.

$$\because \psi(x) = P(\sup_{n\geq 1} S(T_n) > x)$$

$$= P(\sup_{n>k}(\sum_{i=k+1}^{n}(Z_i - c\theta_i) + \sum_{i=1}^{k}(Z_i - c\theta_i)) > x)$$

$$= \int_0^\infty dP(\theta \leq \frac{t}{c}) \int_0^\infty P(\sup_{n>k}(\sum_{i=k}^{n}(Z_i - c\theta_i) > x + t - y))\, dF(y)$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \psi^*(x + t - y)\, dF(y)\, dP(\theta \leq \frac{t}{c}).$$

$$\therefore \frac{\psi(x)}{\overline{F_e}(x)} = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\psi^*(x+t-y)}{\overline{F_e}(x)}\, dF(y)\, dP(\theta \leq \frac{t}{c}).$$

根据引理 2.1, $F_e \in (D \cap L)$,对某个 $l: l \in (0, 1)$,上式可分成两部分:

$$\frac{\psi(x)}{\overline{F_e}(x)} = \int_0^\infty \left(\int_0^{lx} + \int_{lx}^\infty\right) \frac{\psi^*(x+t-y)}{\overline{F_e}(x)}\, dF(y)\, dP(\theta \leq \frac{t}{c}) \approx I_1 + I_2.$$

下证 $\lim\limits_{x\to\infty} I_1 = \rho^{-1}$, $\lim\limits_{x\to\infty} I_2 = 0$.

一方面,$I_2 = \int_0^\infty \int_{lx}^\infty \dfrac{\psi^*(x+t-y)}{\overline{F_e}(x)}\, dF(y)\, dP(\theta \leq \dfrac{t}{c}) \leq \int_0^\infty \int_x^\infty \dfrac{1}{\overline{F_e}(x)}\, dF(y)\, dP(\theta \leq \dfrac{t}{c}) = \dfrac{\overline{F}(lx)}{\overline{F_e}(x)}$

由已知条件得,当 $x \to \infty$, $\dfrac{\overline{F}(lx)}{\overline{F_e}(x)} \to 0$,即 $\lim\limits_{x\to\infty} I_2 = 0$.

另一方面,根据引理 2.2　$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\psi^*(x)}{\overline{F_e}(x)} = \rho^{-1}$,所以存在 x_0 和 c_1,

当 $x > x_0$ 时 $\dfrac{\psi^*(x)}{\overline{F_e}(x)} \leq c_1$;当 $0 < x < x_0$, $\dfrac{\psi^*(x)}{\overline{F_e}(x)} \leq \dfrac{1}{\overline{F_e}(x_0)}$,

因此存在 c_2,使对 $x > 0$,有 $\dfrac{\psi^*(x)}{\overline{F_e}(x)} \leq c_2$.　　(1)

又有 $\triangle \approx \dfrac{\psi^*(x+t-y)}{\overline{F_e}(x)} I(0 \leq t < \infty, 0 \leq y \leq lx)$

$$\leq \frac{\psi^*((1-l)x) \cdot \overline{F_e}((1-l)x)}{\overline{F_e}((1-l)x) \cdot \overline{F_e}(x)} I(0 \leq t < \infty, 0 \leq y \leq lx)$$

根据(1)和 $F_e \in D$,存在常数 c_3,使 $\triangle \leq c_3 I(0 \leq t < \infty, 0 \leq y \leq lx)$.

从而根据控制收敛定理,

$$\lim_{x\to\infty} I_2 = \int_0^\infty \int_x^\infty \lim_{x\to\infty} \frac{\psi^*(x+t-y)}{\overline{F_e}(x)}\, dF(y)\, dP(\theta \leq \frac{t}{c}) = \rho^{-1}.$$

定理得证.

推论 3.1　在本文给出的更新风险模型中,假定相对安全负载条件 $\rho > 0$,当索赔额分布 $F \in D$ 时,有破产概率 $\psi(x)$ 尾等价关系成立,即 $\psi(x) \sim \rho^{-1}\overline{F_e}(x)$.

证明　令 $A = \{F: \lim\sup\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\overline{F}(lx)}{\overline{F_e}(x)} < \infty$ 对某个 $l \in (0,1)\}$,

$\because D \subset A$

$\therefore$ 由定理 3.1 得推论 3.1

(下转第 157 页)

动点 $\boldsymbol{\alpha}_B = \boldsymbol{\alpha}_e + \boldsymbol{\alpha}_r + \boldsymbol{\alpha}_k$ 如图 6

式中 $\boldsymbol{\alpha}_e = \boldsymbol{\alpha}_A + \boldsymbol{\alpha}^{\tau}_{B'A} + \boldsymbol{\alpha}^{n}_{B'A}$

$\boldsymbol{\alpha}_A = \dot{\boldsymbol{\varphi}} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{r})$

$\boldsymbol{\alpha}^{\tau}_{B'A} = \ddot{\boldsymbol{\theta}} \times \boldsymbol{R}$（由于 $\ddot{\varphi}=0$）

$\boldsymbol{\alpha}^{n}_{B'A} = (\dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\varphi}}) \times [(\dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\varphi}}) \times \boldsymbol{R}]$

$\boldsymbol{\alpha}_r = \dot{\boldsymbol{R}}$

$\boldsymbol{\alpha}_k = 2(\dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\varphi}}) \times \dot{\boldsymbol{R}}$

$\therefore \alpha_{bx} = 2(\dot{\theta} + \dot{\varphi})\dot{R} - \ddot{\theta}R + (\dot{\varphi})^2 r\cos\theta$

$\alpha_{by} = \ddot{R} - (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 r - (\dot{\varphi})^2 r\sin\theta$

$\boldsymbol{\alpha}_B = \alpha_{bx}\boldsymbol{i} + \alpha_{by}\boldsymbol{j}$

4　结论

1) 质点相对定系的绝对运动与所选动系无关，但牵连和相对运动随动系而转化．因此 $\boldsymbol{\upsilon}_e$、$\boldsymbol{\alpha}_e$、$\boldsymbol{\upsilon}_r$、$\boldsymbol{\alpha}_r$、α_k 可呈现不同的组合形式．

2) 平面运动法和极坐标法都能解决平面上点的合成运动问题．前者把平面运动作为牵连运动（相对运动简单），后者重在极坐标表示的相对运动（牵连运动简单），这是两种各有侧重的研究方法．

3) 平面运动法适于解已知质点作平面曲线运动的加速度问题．因这种方法是在解题中逐步推出加速度式．不用繁琐的极坐标公式，易于记忆和掌握．

参考文献：

[1] 清华大学理力教研组．理论力学（上）[M]．北京：人民教育出版社，1981.

[2] 哈尔滨工业大学理力教研室．理论力学（Ⅰ）[M]．北京：高等教育出版社，2002.

[3] 余学进，等．来自工程实践的力学问题[J]．大学物理，2002.12.

[4] David J．McGill and wiltonw．king．An introduction to Dynamics．wadsworth inc．1984.

[5] David J．McGill，Dynamics[M]．Wadsworth．inc．1984.

Expanding application of theory of plane motion of rigid body

HUANG Lin，ZHOU Jin-nan

(1．Departmen of Civil Construction，Nanchang Institute Of Aeronautical Technology Nanchang 330034；2．Zhejiang Jiaxing College，Jiaxing 314000，China)

Abstract：The conception of rigid body making plane motion is expanded to particle system which make plane motion in the paper．It is taken as moving frame of reference to solve composite motion problem．The results using new method presented in the paper is consistent with the method of polar coordinates．

Key words：plane motion；relative motion；polar coordinate

（上接第 143 页）

参考文献：

[1] 尹传存．关于破产概率的一个局部定理[J]．中国科学 A 辑，2004，34(2)：192－202.

[2] 唐启鹤．重尾索赔下关于破产概率的一个等价式．中国科学 A 辑，2002，32(3)：260－266.

[3] Grandell J．Aspects of Risk Theory[M]．New York ：Springer Verlag，1991.

[4] Tang Qihe．Ruin probabilities for large claims in renewal risk model [A]．Proceeding of Third Symposuim of Post-graduates of USTC[C]．2000，196－201.

[5] 孔繁超，曹龙．更新风险模型和延迟更新风险模型中破产概率的若干结果[J]．数学年刊，2003，119－128.

A Tail Equivalence Relationship of Ruin Probability in Renewal Risk Model

PENG Dan[1,2]，LIU Dong-hai[1,2]

(1．Department of Mathematics，Hunan University of Science and Technology，Xiangtan 411201；2．Department of Mathematics，Central South University，Changsha 410075，China)

Abstract：The paper presents a renewal risk model．Under the assumption that the claim size is heavy-tailed，when the claim size distribution satisfies a certain condition，we get the same tail equivalence relationship of ruin probability as in the classic risk model．

Key words：heavy-tailed distribution；ruin probability；renewal risk model