文章编号:1005－0523(2005)05－0144－03

拟理想与型－A半群

李春华

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:主要研究了型－A半群的富足拟理想,证明了在型－A半群S上存在富足拟理想,其上的幂等可分良同余可扩张为S上的幂等可分良同余.

关 键 词:型－A半群;(富足)拟理想;(幂等可分)良同余

中图分类号:O152.7　　**文献标识码**:A

1 若干准备

文中一般定义及记号均参见[1－8].

令 S 为半群,S 上的 Green $*$－关系 L^* 及 R^* 可等价的定义如下:

$L^*=\{(a,b)\in S\times S:(\forall x,y\in S^1)\ ax=ay\Leftrightarrow bx=by\}$

$R^*=\{(a,b)\in S\times S:(\forall x,y\in S^1)\ xa=ya\Leftrightarrow xb=yb\}$

引理 1.1[1]　令 S 为半群,$a,b\in S$,$e=e^2$,则以下各款等价:

(i) $aL^*(aR^*e)$;

(ii) $a=ae(a=ea)$ 且 $\forall x,y\in S^1$,$ax=ay\Rightarrow ex=ey(xa=ya\Rightarrow xe=ye)$.

众所周知,L^* 是上的右同余,R^* 是上的左同余. 一般地,$L\subseteq L^*$ 且 $R\subseteq R^*$. 但当 a,b 是正则元时,$aL^*b(aR^*b)$ 当且仅当 $aLb(aRb)$. 为方便记,我们用 L_a^* 表示含的 L^*－类,用 R_a^* 表示含的 R^*－类. $E(T)$ 表示 T 中的幂等元集. 记 a^+ 为 $E(R_a^*)$ 中元,a^* 为 $E(L_a^*)$ 中元. 半群 S 称为富足的,如果它的所有的 L^*－类及 R^*－类都含幂等元;富足半群 S 称为拟适当的,如果 S 的幂等元集是 S 的子半群. 拟适当半群 S 称为适当的,如果它的幂等元集形成半格. 富足半群 S 称为IC的,如果对任意 $a\in S$,$a^*\in L_a^*\cap E(S)$,$a^+\in R_a^*\cap E(S)$,存在双射 θ: $\langle a^+\rangle\to\langle a^*\rangle$,其中 $\langle a^+\rangle$ 是满足 $x=xa^+=a^+x$ 的幂等元 x 生成的 S 的子半群. 一个型－A半群可等价的定义为IC的适当半群.

令 S 为富足半群且 $a,b\in S$,在 S 上按如下定义三种关系:

$a\leqslant_r b\Leftrightarrow R_a^*\leqslant R_b^*$ 且存在幂等元 $e\in R_a^*$ 满足 $a=eb$; $a\leqslant_l b\Leftrightarrow L_a^*\leqslant L_b^*$ 且存在幂等元 $f\in L_a^*$ 满足 $a=bf$; $a\leqslant b=a\leqslant_r\cap\leqslant_l b$;即 $a\leqslant b$ 当且仅当存在幂等元 $e\in R_a^*$,$f\in L_a^*$ 满足 $a=eb=bf$;

引理 1.2[7]　令 S 为富足半群,则 S 是IC的当且仅当 $\leqslant=\leqslant_r\cap\leqslant_l$.

引理 1.3[6]　令 S 为型－A半群,$a,b\in S$ 且 $a\leqslant b$,则对任给的 $c\in S$,$ac\leqslant bc$,$ca\leqslant cb$.

按El－Qallali及Fountain[1],半群 S 上的同余保持 L 及 R 关系但未必保持 L^* 及 R^* 关系,保持 L^* 及 R^* 关系的同余称为良同余. 郭[5]研究了拟适当半群上的幂等可分良同余.

引理 1.4[5]　令 ρ 为拟适当半群 S 上的良同

收稿日期:2005－01－16

基金项目:江西省自然科学基金(0311038)与江西省教育厅科研基金资助项目.

作者简介:李春华(1973－),男,江西宜丰人,讲师,主要从事正则半群及富足半群理论的研究.

余，则 ρ 幂等可分$\Leftrightarrow \rho \subseteq H^*$.

令 M 为半群 S 的子半群，若 $MSM \subseteq M$，则称 M 为 S 的拟理想. 拟理想 M 称为富足的，若它是一富足半群. 半群 S 的幂等元子集 F 称为 $E(S)$ 的序理想，若 $\forall f \in F, e \in E(S), e \leqslant f \Rightarrow e \in F$. 若 $\forall e, f \in F, S(e,f) \neq \Phi$，则称 F 为 $E(S)$ 的双序理想，这里 $S(e,f)=\{g \in E(S): ef=egf, ge=g=fg\}$[6].

2 主要结果

命题 2.1　令 S 为 IC 拟适当半群且 Q 为 S 的拟理想. AQ 为 Q 中的所有富足元素的集合. 则以下各款成立：

1) $E(Q)$ 是 $E(S)$ 的双序理想；2) AQ 是 S 的序理想；3) AQ 是 S 的富足拟理想；4) AQ 是 IC 拟适当半群.

证明　1) 令 $e=E(Q), f \in E(S)$ 且 $f \leqslant e$，则 $f=ef=fe=efe \in QSQ \subseteq Q$，于是 $f \in E(Q)$. 又令 $f, g \in E(Q)$，因 S 为拟适当半群，故 fg 为幂等元，可设 x 为 fg 的逆元. 易证 $gxf \in S(e,f) \cap E(Q)$. 因此 $E(Q)$ 是 $E(S)$ 的双序理想.

2) 先证 AQ 是 S 的富足子半群. 令 $a, b \in AQ$，则存在幂等元 $a^+, b^* \in E(Q)$ 满足 $aR^*(Q)a^+$ 及 $bL^*(Q)b^*$. 注意到 $abL^*(S)(ab)^*$，因 L^* 是右同余，故 $abL^*(S)(ab)^*b^*$. 显然 $(ab)^*b^* \in E(S)$ 且 $(ab)^*b^* \leqslant_l b^*$ 又 S 是 IC 的，由引理 1.2，$(ab)^*b^* \leqslant b^*$. 从而 $(ab)^*b^* \in E(Q)$. 于是我们有 $abL^*(Q)(ab)^*b^*$. 同理 $abR^*(Q)a^+(ab)^+$. 因此 AQ 是 S 的富足子半群.

下证 AQ 是 S 的序理想. 令 $x \in S, a \in AQ$ 且 $x \leqslant a$，则 $x=ea=af$，其中 $e \in E(R_x^*), f \in E(L_x^*)$. 于是 $x=a^+ea$. 又 Q 为 S 的拟理想，故 $x \in Q$. 另一方面，由 R^* 是左同余，得 $x=a^+xR^*(S)a^+e$. 显然 $a^+e \leqslant_r a^+$. 又 S 是 IC 的，由引理 1.2，$a^+e \leqslant a^+$. 根据(1)知，$a^+e \in E(Q)$ 且有 $xR^*(Q)a^+e$. 类似地，$xL^*(Q)fa^*$，其中 $fa^* \in E(Q)$. 因此，$x \in AQ$. 即 AQ 是 S 的序理想.

3) 令 $a, b \in AQ, x \in S$. 则 $axb \in Q$. 另一方面，$axbL^*(S)(axb)^*$. 因 L^* 是右同余，故 $axbL^*(S)(axb)^*b^*$. 显然，$(axb)^*b^* \leqslant_l b^*$，又 S 是 IC 的，于是由引理 1.2，$(axb)^*b^* \leqslant b^*$. 又由(1)，$(axb)^*b^* \in E(Q)$. 因而 $axbL^*(Q)(axb)^*b^*$. 同理，$axbR^*(Q)a^+(axb)^+$ 且 $a^+(axb)^+ \in E(Q)$. 因此 $axb \in AQ$. 即 AQ 是 S 的富足拟理想.

4) 只需证 AQ 是 IC 的. 这可由(3)及 IC 定义可直接证得.

命题 2.2　令是 IC 拟适当半群且 F 是 $E(S)$ 的双序理想，记 $M=\{a \in S: a^* \in F \cap L_a^*, a^+ \in F \cap R_a^*\}$，则 M 是 S 的富足拟理想且 $F=E(M)$. 特别地，$M=\bigcup\{uSv: u \in F, v \in F\}$.

证明　令 F 是 $E(S)$ 的双序理想，则 $\forall a, b \in M, x \in S$ 我们有 $axbL^*(S)(axb)^*$. 因 L^* 是右同余，故 $axbL^*(S)(axb)^*b^*$. 显然 $(axb)^*b^* \leqslant_l b^*$. 又 S 是 IC 的，于是由引理 1.2，$(axb)^*b^* \leqslant b^*$，进而 $(axb)^*b^* \in F$. 类似地可证，$axbR^*(S)a^+(axb)^+$，且 $a^+, a^+(axb)^+ \in F$. 因而 $axb \in M$. 即 $MSM \subseteq M$. 显然 M 是富足的，因此 M 是 S 的富足拟理想.

下证 $F=E(M)$. 显然 $F \subseteq E(M)$，因而只需证反包含. 令 $e \in E(M)$，则存在幂等元 $e^*, e^+ \in F$，满足 $e^+R^*(M)eL^*(M)e^*$. 但 S 是型－A 半群，则有 $e=e^+=e^* \in F$ 因而结论成立.

现在我们证 $M=\bigcup\{uSv: u \in F, v \in F\}$. 只需证逆包含即可. 令 $a \in uSv$，其中 $u, v \in F$，则 $\exists x \in S$，使得 $a=uxv$. 注意到 $uxL^*(S)(ux)^*$. 因 L^* 是右同余，于是 $uxvL^*(S)(ux)^*v$. 显然 $(ux)^*v \leqslant_l v$. 又 S 是 IC 的，于是由引理 1.2，$(ux)^*v \leqslant v$，进而 $(ux)^*v \in F$. 类似地，可证 $uxvR^*(S)u(xv)^+ \in F$. 因此 $uxv \in M$，至此完成命题证明.

令 R 是半群 S 上的一个关系，$a, b \in S$，则

$(a,b) \in R^{\#} \Leftrightarrow a=b$ 或 $a=z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow \cdots \rightarrow z_{n-1} \rightarrow z_n=b \quad (n \in N)$

其中 $z_i \rightarrow z_{i+1}$ 表示 $z_i=u_ia_iv_i, z_{i+1}=u_ib_iv_i$ 且 $(a_i, b_i) \in \rho \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$ 我们称上述序列为连接 a, b 的基本 R－传递序列[8].

定理 2.3　令 S 为型－A 半群，则以下成立：

1) $\forall e, f \in E(S)$，eSf 是 S 的拟理想；

2) $\forall e, f \in E(S)$，若 eSf 是 S 的富足拟理想，则 eSf 是型－A 半群且 $\forall a \in eSf$ 有 $a^*=a^*e, a_+=fa^+$；

3) 若 eSf 是 S 的富足拟理想，则 eSf 上的同余都可扩张为 S 上的同余.

证明　1) 显然成立.

2) $\forall e, f \in E(S)$，令 eSf 是 S 的富足拟理想，则由命题 2.1，易证 eSf 是型－A 半群. 又令 $a \in eSf$，则 $aL^*(eSf)a^*, aR^*(eSf)a^+$. 于是

$$a^*=ea^*=a^*e, a^+=a^+f=fa^+.$$

3) 令 ρ 是 eSf 上的同余，记 $\rho^{\#}$ 是由 ρ 生成的 S 上的同余，我们只需证 $\rho=\rho^{\#}\cap eSf\times eSf$. 显然 $\rho\subseteq\rho^{\#}\cap eSf\times eSf$. 反之，令 $(x,y)\in\rho^{\#}\cap eSf\times eSf$，则有 $x=y$ 或存在序列 $x=x_1\to x_2\to\cdots\to x_n=y$ 满足

$x_i=u_ia_iv_i$, $x_{i+1}=u_ib_iv_i$，其中 $u_i,v_i\in S^1$, $(a_i,b_i)\in\rho\quad(1\leqslant i\leqslant n)$

又 $x=exf$, $y=eyf$，故上述序列可用下面序列代替

$$x=ex_1f\to ex_2f\to\cdots\to ex_nf=y$$

又由 (2) 知，$ex_if=eu_ia_iv_if=eu_ia_i^{+}a_ia_i^{*}v_if=eu_ifa_i^{+}a_ia_i^{*}ev_if=(eu_if)a_i(ev_if)$.

类似地，$ex_{i+1}f=eu_ib_iv_if=(eu_if)b_i(ev_if)$.

而 $(a_i,b_i)\in\rho$ 且 eu_if, $ev_if\in eSf$，于是 $(ex_if,ex_{i+1}f)\in\rho(1\leqslant i\leqslant n)$. 故 $(x,y)\in\rho$，反包含成立.

定理 2.4 令 M 为型 A 半群 S 的富足拟理想且 ρ 为 M 上的幂等可分良同余，则以下各款成立：

1) $a\rho b\Rightarrow a^{*}=b^{*}$, $a^{+}=b^{+}\quad(\forall\ a,b\in M)$；

2) 若 $\rho=1_M$，则 $\rho^{\#}$ 是 S 上的幂等可分良同余；

3) 若 $\rho^{\#}$ 是 S 上的幂等可分良同余，则 $\rho=\rho^{\#}\cap M\times M$.

证明 1) 因 S 是型 A 半群，由命题 2.1，M 是 S 的型 A 子半群. 令 $a,b\in M$，且 $a\rho b$，则由引理 1.4，$\rho\subseteq H^{*}(M)\subseteq L^{*}(M)$. 于是 $aL^{*}(M)b$，从而 $a^{*}=b^{*}$. 类似地，$a^{+}=b^{+}$ 2) 显然成立.

3) 首先注意到，若 $s,t\in S$，则 $(s,t)\in\rho^{\#}\Leftrightarrow s=t$ 或存在序列

$$s=s_1\to s_2\to\cdots\to s_n=t\quad(n\in N)$$

其中 $s_i\to s_{i+1}$ 意味着 $s_i=u_ia_iv_i$, $s_{i+1}=u_ib_iv_i$ 且 $(a_i,b_i)\in\rho\quad(1\leqslant i\leqslant n)$

假设 $s_i\in M$，我们证 $s_{i+1}\in M$ 且 s_i, s_{i+1} 有 ρ 关系. 因 ρ 及 $\rho^{\#}$ 均为幂等可分良同余且 $(a_i,b_i)\in\rho$，我们有 $s_{i+1}^{*}=s_i^{*}$, $s_{i+1}^{+}=s_i^{+}$, $a_i^{*}=b_i^{*}$，及 $a_i^{+}=b_i^{+}$. 于是有

$$s_{i+1}=s_i^{*}s_{i+1}s_i^{*}=s_i^{+}u_ia_i^{+}b_ia_i^{*}v_is_i^{*}=(s_i^{*}u_ia_i^{+})b_i(a_i^{*}v_is_i^{*}).$$

因 M 为富足拟理想，故 $w_i=(s_i^{+}u_ia_i^{+})\in MSM\subseteq M$，$z_i=(a_i^{*}v_is_i^{*})\in MSM\subseteq M$，于是 $s_{i+1}\in M$. 又 $(a_i,b_i)\in\rho$，从而 $(w_ia_iz_i,w_ib_iz_i)\in\rho$. 即 $(s_i,s_{i+1}\in\rho$. 因此，若 $s\in M$ 且 $(s,t)\in\rho^{\#}$，则 $t\in M$ 且 $(s,t)\in\rho$. 换言之，$\rho^{\#}\cap M\times M\subseteq\rho$. 反包含是显然的. 因此，$\rho=\rho^{\#}\cap M\times M$.

参考文献：

[1] A. El-Qalliali and J. B. Fountain. Idempotent-connected abundant semigroups. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, A91 (1981), 79—90.

[2] A. El-Qalliali and J. B. Fountain. Quasi-adequate semigroups. Proc. Roy. Soc. Edingburgh. Sect. A91(1981), 91—99.

[3] J. B. Fountain. Adequate semigroups. Proc. Edinburgh Math. Soc. (2)22(1979), 113—125.

[4] J. B. Fountain. Abundant semigroups. Proc. London Math. Soc. 44(1982), 103—129.

[5] Xiaojiang Guo. Idempotent-separated good congruences on a quasi-adequate semigroup. Jour. Pure Math; vol. 16, 1999, pp. 57(5).

[6] M. v. Lawson. The structure of type Asemigroups. Quart. J. Math. Oxfordser. (2)37(1986), 279—298.

[7] M. v. Lawson. The natural partial order on an abundant semigroup. Proceedings of the Edinburg. Math. Soc. 30(1987), 169—186.

[8] M. Petrich. Completely regular semigroups. New York: Jhon Wiley&Sons Inc, 1999.

Quasi-ideals and Type A Semigroups

LI Chun-hua

(School of Natural Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper, we study abundant quasi-ideals on type—A semigroups. We prove that there exists an idempotent-separated good congruence on an abundant quasi-ideal of a type-A semigroup S, which can be extended to an idempotent-separated good congruence on S.

Key words: type A semigroup; (abundant)quasi-ideal; (idempotent-separated)good congruence