

文章编号: 1005—0523(2005)05—0151—04

指数分布在第二类 Stirling 数中的应用

毛俊超¹, 冯立华²

(1. 中国海洋大学 数学系, 山东 青岛 266071; 2. 上海交通大学, 上海 200000)

摘要: 采用概率的方法, 把第二类 Stirling 数 $S(n, k)$ 表示成服从指数分布的随机变量的矩, 利用该表示得到了第二类 Stirling 数 $S(n, k)$ 的一些特殊值, 推导出了第二类 Stirling 数 $S(n, k)$ 满足的递推关系式, 并得到了新的递推关系式.

关 键 词: Stirling 数; 指数分布; 矩; 递推关系式

中图分类号: O157.1

文献标识码: A

0 引 言

概率论与组合数学关系密切, 把概率论的方法引用到组合分析问题中有着重要的意义. [1] 中作者提出该思想, 此后该思想被应用到 Ramsey 理论、图论、组合优化等方面; [2] 中作者讨论了 Stirling 数、Bell 数与 Poisson 分布的一些联系; [3] 中作者把一些组合数和组合多项式表示成随机变量的矩, 其中蕴涵的构造性思想及其应用技巧具有极其重要作用, 这些工作都是从概率的角度研究组合问题. 为了探讨该方法的有效性和实用性, 本文在第 2 节对 [2] 中 $S(n, k)$ 的一种概率表示给予了证明, 利用该表示得到了 $S(n, k)$ 的一些特殊值. 第 3 节运用该表示推导出了第二类 Stirling 数 $S(n, k)$ 满足的递推关系式, 并得到了新的递推关系式.

1 预备知识

1.1 本文用到概率论的一些知识^[4]

1) 数学期望及矩: 设 X 为具有密度函数 $p(x)$ 的连续型随机变量(下文简记为 $r \cdot v$), 当积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx$ 绝对收敛时, 称它为 X 的数学期望, 记 $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx$.

对正整数 n , $EX^n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p(x) dx$ 称为 $r \cdot vX$ 的 n 阶矩.

2) 期望的性质: ① 对任意常数 $c_i, i=1, 2, \dots, n$ 及 b 有 $E(\sum_{i=1}^n c_i + b) = \sum_{i=1}^n c_i EX_i + b$.

② 若 $r \cdot vX$ 与 Y 相互独立, 则 $E(XY)$ 存在, 且 $E(XY) = EX \cdot EY$.

更一般的, $r \cdot v$ 序列 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立, 则 $E(\prod_{i=1}^n X_i) = \prod_{i=1}^n (EX_i)$.

3) 指数分布: $r \cdot v\Gamma \sim \Gamma(\lambda), \lambda > 0$, 称为 Γ 服从参数为 λ 的指数分布, 其密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

收稿日期: 2004—12—18

作者简介: 毛俊超(1976—), 男, 山东临沂人, 在读硕士研究生.

称 $E\Gamma^n = n! / \lambda^n$ 特别地, $E\Gamma^n = n!$ 当 $r \bullet v \Gamma \sim \Gamma(1)$ 时.

1.2 本文涉及到的有关第二类 Stirling 数的知识^[5]

1) 定义: n 元集所有 k 划分的个数 $S(n, k)$ 叫做第二类 Stirling 数, 也等于把 n 个不同的球分配到 k 个不加区别的盒子里, 不考虑盒子顺序且没有盒子为空的所有分配数. 规定: $S(n, k) = 0, (1 \leq n < k), S(0, 0) = 1, S(0, k) = 0 (k \geq 1)$.

2) $S(n, k)$ 的显示表达式.

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$

$$S(n, k) = \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_k=n-k \\ \text{诸 } i_k \geq 0}} i_1 i_2 \dots i_k.$$

3) $S(n, k)$ 满足的递推关系式.

① $S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k), n, k \geq 0, S(n, 0) = S(0, k) = 0$ 除 $S(0, 0) = 1$.

② $S(n, k) = \sum_{m=k}^n k^{n-m} S(m-1, k-1)$.

2 $S(n, k)$ 的一种概率表示

定理 1^[3] 假设 $r \bullet v$ 序列 $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ 相互独立, 并且分布相同, $\Gamma_i \sim \Gamma(1), i \in N$, 则当 $n \geq k \geq 1$ 时, $S(n, k) = \frac{1}{(n-k)!} E(\Gamma_1 + 2\Gamma_2 + \dots + k\Gamma_k)^{n-k} \dots (*)$

$$S(n, 0) = S(0, k) = 0, S(0, 0) = 1.$$

证明 因为 $S(n, k) = \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_k=n-k \\ \text{诸 } i_k \geq 0}} i_1 i_2 \dots i_k$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(n-k)!} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_k=n-k} \frac{(n-k)!}{i_1! i_2! \dots i_k!} 1^{i_1} i_1! 2^{i_2} i_2! \dots k^{i_k} i_k! \\ &= \frac{1}{(n-k)!} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_k=n-k} \left[\begin{matrix} n-k \\ i_1, i_2, \dots, i_k \end{matrix} \right] E\Gamma_1^{i_1} E(2\Gamma_2)^{i_2} \dots E(k\Gamma_k)^{i_k} \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{(n-k)!} E[\sum_{i_1+i_2+\dots+i_k=n-k} \left[\begin{matrix} n-k \\ i_1, i_2, \dots, i_k \end{matrix} \right] \Gamma_1^{i_1} (2\Gamma_2)^{i_2} \dots (k\Gamma_k)^{i_k}] \\ &= \frac{1}{(n-k)!} E(\Gamma_1 + 2\Gamma_2 + \dots + k\Gamma_k)^{n-k} \end{aligned}$$

所以定理成立. 其中(1)利用序列 $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ 相互独立, 期望的性质.

由(*)式我们容易得到 $S(n, k)$ 的一些特殊值.

$$S(n, 1) = \frac{1}{(n-1)!} E\Gamma_1^{n-1} = \frac{(n-1)!}{(n-1)!} = 1.$$

$$S(n, n) = E(\Gamma_1 + 2\Gamma_2 + \dots + n\Gamma_n)^0 = 1.$$

$$S(n, n-1) = E[\Gamma_1 + 2\Gamma_2 + \dots + (n-1)\Gamma_{n-1}] = 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

$$S(n, 2) = \frac{1}{(n-2)!} E(\Gamma_1 + 2\Gamma_2)^{n-2} = \frac{1}{(n-2)!} \sum_{i=0}^{n-2} \left[\begin{matrix} n-2 \\ i \end{matrix} \right] (E\Gamma_1^{n-2-i}) E(2\Gamma_2)^i = 2^{n-1} - 1.$$

这样我们就得到 Stirling 数表的前两列及主对角线和次对角线元素.

3 $S(n, k)$ 满足的递推关系式的推导及发现

3.1 利用(*)式可以推导出 $S(n, k)$ 满足的递推关系式.

1) $S(n, k) = S(n-k, k-1) + kS(n-1, k)$ 的推导.

记 $S_{k-1} = \Gamma_1 + 2\Gamma_2 + \dots + (k-1)\Gamma_{k-1}$ 则

$$\begin{aligned}
S(n, k) - S(n-1, k-1) &= \frac{1}{(n-k)!} \{ E(\Gamma_1 + \dots + k\Gamma_k)^{n-k} - E[\Gamma_1 + \dots + (k-1)\Gamma_{k-1}]^{n-k} \} \\
&= \frac{1}{(n-k)!} E \left[\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} S_{k-1}^j (k\Gamma_k)^{n-k-j} \right] - ES_{k-1}^{n-k} \\
&= \frac{1}{(n-k)!} \left[E \sum_{j=0}^{n-k-1} \binom{n-k}{j} S_{k-1}^j (k\Gamma_k)^{n-k-j} + ES_{k-1}^{n-k} - ES_{k-1}^{n-k} \right] \\
&\stackrel{(a)}{=} \frac{1}{(n-k)!} \sum_{j=0}^{n-k-1} \binom{n-k}{j} ES_{k-1}^j (k\Gamma_k)^{n-k-j-1} K(n-k-j) \\
&= E \left[\sum_{j=0}^{n-k-1} \binom{n-k-1}{j} S_{k-1}^j (k\Gamma_k)^{n-k-1-j} \frac{\binom{n-k}{j} k(n-k-j)}{\binom{n-k-1}{j} (n-k)!} \right] \\
&= \frac{k}{(n-k-1)!} E(S_{k-1} + k\Gamma_k)^{n-k-1} = kS(n-1, k)
\end{aligned}$$

所以 $S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$.

其中(a)利用 $E(k\Gamma_k)^{n-k-j} = k^{n-k-j}(n-k-j)! = k(n-k-j)E(k\Gamma_k)^{n-k-j-1}$.

2) $S(n, k) = \sum_{m=k}^n k^{n-m} S(m-1, k-1)$ 的推导.

$$\begin{aligned}
S(n, k) &= \frac{1}{(n-k)!} E(\Gamma_1 + 2\Gamma_2 + \dots + k\Gamma_k)^{n-k} = \frac{1}{(n-k)!} E \left[\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} S_{k-1}^{n-k-j} (k\Gamma_k)^j \right] \\
&= \sum_{j=0}^{n-k} \frac{1}{(n-k-j)!} [ES_{k-1}^{n-k-j-(k-1)}] \frac{(n-k-j)!}{(n-k)!} \binom{n-k}{j} E(k\Gamma_k)^j \\
&= \sum_{j=0}^{n-k} S_{(n-1-j, k-1)} k^j \stackrel{(a)}{=} \sum_{m=k}^n k^{n-m} S(m-1, k-1)
\end{aligned}$$

其中(a)式令 $j = n-m$.

表 1 第二类 Stirling 数的一些特殊值

$n \setminus k$	1	2	3	4	...	$n-1$	$n \dots$
1	1						
2	1	1					
3	1	3	1				
4	1	7	6	1			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$	$\ddots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$	$\ddots$		
n	1	$2^{n-1} - 1$				$n(n-1)$	1
						2	$\ddots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				$\ddots$	$\ddots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				$\ddots$	$\ddots$

3.2 利用(*)式还可以得到新的递推关系式.

定理 2: 设 $n > k$, 则 $S(n, k) = \frac{1}{n-k} \sum_{m=k+1}^n [(m-k)k^{n-m}S(m-1, k-1) + (n-m+1)k^{n-m+1}S(m-2, k-1)]$

$$\begin{aligned}
\text{证明} \quad S(n, k) &= \frac{1}{(n-k)!} E(\Gamma_1 + 2\Gamma_2 + \dots + k\Gamma_k)^{n-k} \\
&= \frac{1}{(n-k)!} E \left[\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} S_{k-1}^{n-k-j} (k\Gamma_k)^j \right] \\
&\stackrel{(a)}{=} \frac{1}{(n-k)!} E \left[\sum_{j=0}^{n-k-1} \binom{n-k-1}{j} S_{k-1}^{n-k-j} (k\Gamma_k)^j + \sum_{j=0}^{n-k-1} \binom{n-k-1}{j} S_{k-1}^{n-k-j-1} (k\Gamma_k)^{j+1} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{n-k-1} \frac{k!j!}{(n-k)!} \binom{n-k-1}{j} ES_{k-1}^{n-j-1-(k-1)} + \sum_{j=0}^{n-k-1} \frac{k^{j+1}(j+1)!}{(n-k)!} \binom{n-k-1}{j} ES_{k-1}^{n-j-2-(k-1)} \\
&= \sum_{j=0}^{n-k-1} \frac{k^j(n-k-j)}{n-k} S(n-j-1, k-1) + \sum_{j=0}^{n-k-1} \frac{k^{j+1}(j+1)}{n-k} S(n-j-2, k-1) \\
&\stackrel{(b)}{=} \frac{1}{n-k} \sum_{m=k+1}^n [(m-k)k^{n-m}S(m-1, k-1) + (n-m+1)k^{n-m+1}S(m-2, k-1)]
\end{aligned}$$

其中(a)利用组合恒等式 $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ 得

$$\binom{n-k}{j} = \begin{cases} \binom{n-k-1}{0} & j=0 \\ \binom{n-k-1}{j-1} & 1 \leq j \leq n-k-1 \\ \binom{n-k-1}{n-k-1} & j=n-k \end{cases} + \binom{n-k-1}{j} \quad 1 \leq j \leq n-k-1.$$

(b)令 $m=n-j$.

此外,利用组合知识和概率技巧还应该可以得到其他递推关系式和恒等式.

4 结论

把概率论和组合数学结合起来,从概率论的角度研究组合问题的确具有一定的有效性与实用性.该研究已被国外的部分专家所关注,相信会有广阔的发展前景.

参考文献:

- [1] P·Erdős, J·Spencer·Probabilistic Methods in Combinatorics[J]·New York: Academic Press, 1974.
- [2] 迟雄标·Poisson 分布中的 Stirling 数和 Bell 数[J]·韶关大学学报 1999, 8: 14—18.
- [3] 孙平, 王天明·Stirling 数的概率表示和应用[J]·数学学报, 1998, 3: 281—290.
- [4] 复旦大学·概率论基础[M]·北京: 高等教育出版社, 1979.
- [5] L·Comtet·Advanced Combinatorics·Boston: D Reidel Publishing company, 1974: 204—210.

The Application of Exponential Distribution on Stirling Number of the Second Kind

MAO Jun-chao¹, FENG Li-hua²

(1·Department of Mathematic, Ocean University of China Qingdao, Qingdao 266071; 2·Shanghai Jiaotong Univ., Shanghai, China 200000)

Abstract: In this paper, a kind of probabilistic representation is given and used to derive some special values of $S(n, k)$ and the recurrence relations between Stirling number $S(n, k)$ of the second kind.

Key words: stirling number; exponential distribution; moment; recurrence