

文章编号:1005-0523(2005)05-0155-03

刚体平面运动理论的扩大应用

黄玲¹, 周静南²

(1. 南昌航空工业学院 330034; 2. 浙江嘉兴学院 机电学院 314000)

摘要:把作为平面运动的实际刚体概念扩展成一个平面运动的抽象质点系, 以此为动系, 用刚体平面运动理论来解无载体牵连的点在平面上复合运动问题, 并用极坐标法和例题进行了验证.

关键词:平面运动; 极坐标法; 相对运动

中图分类号:TP391.4

文献标识码:A

刚体平面运动是一种常见运动, 此运动可分解为平动和转动. 如在刚体上取基点 A 建平动坐标系, 则刚体上任一点 M 与基点 A 的速度、加速度关系式为:

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{MA} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{r}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_M = \boldsymbol{\alpha}_A + \alpha_{MA}^{\tau} + \alpha_{MA}^n = \boldsymbol{\alpha}_M + \boldsymbol{\varepsilon}_M \times \mathbf{r}_M + \boldsymbol{\omega}_M \times (\boldsymbol{\omega}_M \times \mathbf{r}_M)$$

1 刚体平面运动理论的扩大应用

已知质点 A 作平面曲线运动, 相对于定点 O 的 $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$

$$r = r(t), \varphi = \varphi(t)$$

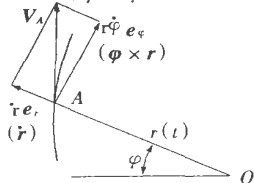


图1

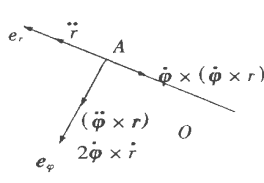


图2

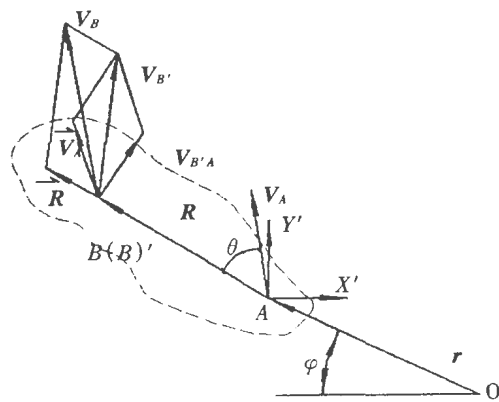


图3

由文献[1], A 点速度 $\mathbf{v}_A = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$ (1)

$\mathbf{v}_A = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\varphi}} \times \mathbf{r}_A$ 见图1.

$$A \text{ 点加速度 } \boldsymbol{\alpha}_A = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} = \frac{d(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi)}{dt}$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (\dot{r}\dot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi \quad (2)$$

对照图2, 上式可改写为

$$\boldsymbol{\alpha}_A = \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\varphi}} \times (\dot{\boldsymbol{\varphi}} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\varphi}} \times \mathbf{r} + 2\dot{\boldsymbol{\varphi}} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (3)$$

现有与 A 点在同一平面上作曲线运动的 B 点, B 点相对于 A 点的距离 $R = R(t)$, $\theta = \theta(t)$. 为求 B 点的绝对运动, 建立一个抽象的包含点 A 和点 B' 的作平面运动的质点系. (用虚线表示, 见图3).

B' 点为此质点系上与动点 B 重合的点, 即质点系对点 B 的牵连点. 以 A 点为基点, 在 A 点上另建立一个平动坐标系, 则运用刚体平面运动理论, 在

收稿日期: 2005-04-10

作者简介: 黄玲(1972~), 女, 硕士, 南昌航空工业学院讲师.

此刚体上 B' 的速度, $\mathbf{v}_B' = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}' = \mathbf{v}_A + (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \times R$. 必须指出因为 A 点作曲线运动, $((\dot{\theta} + \dot{\phi}))$ 才是质点系相对 A 点平动坐标系的角速度, 即质点系的绝对角速度^[1]. 根据点的合成运动理论, 动点 B 的速度为 $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$, $\mathbf{v}_e$, $\mathbf{v}_r$ 为动系上与动点重合的 B' 点的速度, $\mathbf{v}_B'$, $\mathbf{v}_r$ 为动点相对动系的速度 $\mathbf{v}_r = \dot{\mathbf{R}}$.

所以 $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_B' + \dot{\mathbf{R}}$

$= \mathbf{r}_A + (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \times \mathbf{R} + \dot{\mathbf{R}}$ 代入(1)

$$= \dot{\mathbf{r}} + \dot{\phi} \times \mathbf{r} + (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \times \mathbf{R} + \dot{\mathbf{R}} \quad (4)$$

动点 B 的加速度 $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_k$ (5)

因为动系的牵连运动为平面运动, 所以(5)式

含 $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{a}_k = 2(\dot{\theta} + \dot{\phi}) \times \dot{\mathbf{R}}$

式中 $\mathbf{a}_k$ 见(3)式

$$\mathbf{a}_{B'A}' = (\ddot{\phi} + \dot{\phi} \times \dot{\phi}) \times \mathbf{R}, \mathbf{a}_{B'A}'' = (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \times [(\dot{\theta} + \dot{\phi}) \times \mathbf{R}]$$

$$\mathbf{a}_r = \ddot{\mathbf{R}}$$

$$\text{所以 } \mathbf{a}_B = \ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\phi} \times (\dot{\phi} \times \mathbf{r}) + \ddot{\phi} \times \mathbf{r} + 2\dot{\phi} \times \dot{\mathbf{r}} + (\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) \times \mathbf{R} + (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \times [(\dot{\theta} + \dot{\phi}) \times \mathbf{R}] + \ddot{\mathbf{R}} + 2(\dot{\theta} + \dot{\phi}) \times \dot{\mathbf{R}} \quad (6)$$

2 验证

现在用极坐标法解同类问题对 1 结果加以验证. 已知条件同前, 求 B 点的绝对速度和绝对加速度. 由前述(1)、(3)式

$$\mathbf{v}_A = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\phi} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{a}_A = \ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\phi} \times (\dot{\phi} \times \mathbf{r}) + \ddot{\phi} \times \mathbf{r} + 2\dot{\phi} \times \dot{\mathbf{r}}$$

在 A 点建平动坐标系. B 点相对此动系的运动用极坐标表示为 $R = R(t)$, $\theta = \theta(t)$. 此时牵连运动为平动, 见图 4.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_e = \mathbf{v}_A$$

$$\text{由(1)式 } \mathbf{v}_r = \dot{\mathbf{R}} + (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \times \mathbf{R}$$

因为 A 点作曲线运动, B 点相对平动坐标系的角速度矢量为 $(\dot{\theta} + \dot{\phi})$, 角加速度矢量为 $(\ddot{\theta} + \ddot{\phi})$ 所以 $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_r$

$$= \dot{\mathbf{r}} + \dot{\phi} \times \mathbf{r} + (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \times \mathbf{R} + \dot{\mathbf{R}} \text{ 与(4)式相同.}$$

比较图(3)和图(4), 可以看出刚体平面运动理论解与极坐标解法的数学区别仅是矢量合成的次序不同, 物理区别是选用了作不同运动的动系.

动点加速度 $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r$ (此时无 $\mathbf{a}_k$!)

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_A = \ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\phi} \times (\dot{\phi} \times \mathbf{r}) + \ddot{\phi} \times \mathbf{r} + 2\dot{\phi} \times \dot{\mathbf{r}}$$

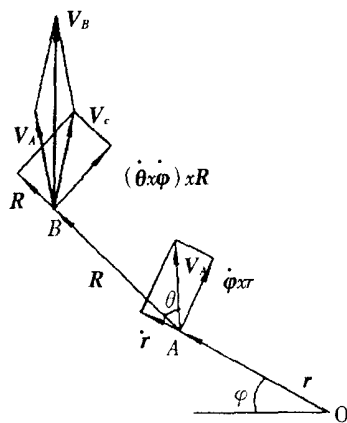


图 4

只要将(3)式中相对定点的 $\dot{\phi}$ 改写成 $(\dot{\theta} + \dot{\phi})$ 即可写出相对平动坐标系的 $\mathbf{a}_r$.

所以 $\mathbf{a}_r = \ddot{\mathbf{R}} + (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \times [(\dot{\theta} + \dot{\phi}) \times \mathbf{R}] + (\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) \times \mathbf{R} + 2(\dot{\theta} + \dot{\phi}) \times \dot{\mathbf{R}}$

$\mathbf{a}_B = \ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\phi} \times (\dot{\phi} \times \mathbf{r}) + \ddot{\phi} \times \mathbf{r} + 2\dot{\phi} \times \dot{\mathbf{r}} + (\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) \times \mathbf{R} + (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \times [(\dot{\theta} + \dot{\phi}) \times \mathbf{R}] + \ddot{\mathbf{R}} + 2(\dot{\theta} + \dot{\phi}) \times \dot{\mathbf{R}}$ 与(6)式完全相同.

3 算题

A 、 B 两机在同平面飞行, 机 A 以匀速 v_A 绕航空母舰 O 作 r 圆弧飞行, 并用雷达追敌机 B , 在某瞬间测得 $\dot{R}$, $\ddot{R}$, φ , $\dot{\phi}$, $\ddot{\phi}$ 如图 5, 求此时机 B 的绝对速度和加速度.

解: 建立一个包含机 A 和 B' 点(机 B 的重合点)的作平面运动的质点系. 由(4)式:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \times \mathbf{R} + \dot{\mathbf{R}}$$

$$v_{Bx} = v_A \sin \theta + (\dot{\theta} + \dot{\phi}) R$$

$$v_{By} = v_A \cos \theta + \dot{R}$$

$$\text{式中 } \dot{\phi} = \frac{v_A}{r}$$

$$\mathbf{v}_B = [v_A \sin \theta + (\dot{\theta} + \dot{\phi}) R] \mathbf{i} + [v_A \cos \theta + \dot{R}] \mathbf{j}$$

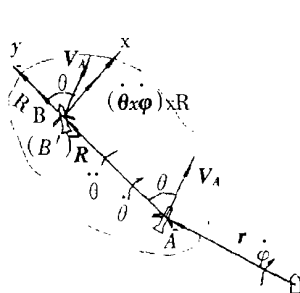


图 5

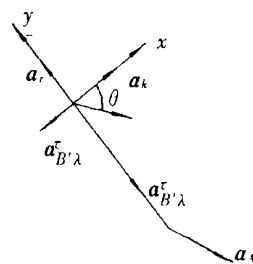


图 6

动点 $\alpha_B = \alpha_e + \alpha_r + \alpha_k$ 如图 6

式中 $\alpha_e = \alpha_A + \alpha_{B'A}^r + \alpha_{B'A}^n$

$$\alpha_A = \dot{\phi} \times (\theta \times r)$$

$$\alpha_{B'A}^r = \theta \times R \text{ (由于 } \ddot{\phi} = 0 \text{)}$$

$$\alpha_{B'A}^n = (\theta + \dot{\phi}) \times [(\theta + \dot{\phi}) \times R]$$

$$\alpha_r = \dot{R}$$

$$\alpha_k = 2(\theta + \dot{\phi}) \times \dot{R}$$

$$\therefore \alpha_{bx} = 2(\theta + \dot{\phi}) \dot{R} - \ddot{\theta} R + (\dot{\phi})^2 r \cos \theta$$

$$\alpha_{by} = \ddot{R} - (\theta + \dot{\phi})^2 r - (\dot{\phi})^2 r \sin \theta$$

$$\alpha_B = \alpha_{bx} \mathbf{i} + \alpha_{by} \mathbf{j}$$

4 结论

1) 质点相对定系的绝对运动与所选动系无关, 但牵连和相对运动随动系而转化. 因此

$v_e, \alpha_e, v_r, \alpha_r, \alpha_k$ 可呈现不同的组合形式.

2) 平面运动法和极坐标法都能解决平面上点

的合成运动问题. 前者把平面运动作为牵连运动 (相对运动简单), 后者重在极坐标表示的相对运动 (牵连运动简单), 这是两种各有侧重的研究方法.

3) 平面运动法适于解已知质点作平面曲线运动的加速度问题. 因这种方法是在解题中逐步推出加速度式. 不用繁琐的极坐标公式, 易于记忆和掌握.

参考文献:

- [1] 清华大学理力教研组. 理论力学(上)[M]. 北京: 人民教育出版社, 1981.
- [2] 哈尔滨工业大学理力教研室. 理论力学(I)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.
- [3] 余学进, 等. 来自工程实践的力学问题[J]. 大学物理, 2002, 12.
- [4] David J. McGill and wiltonw. king. An introduction to Dynamics. wadsworth inc. 1984.
- [5] David J. McGill, Dynamics[M]. Wadsworth. inc. 1984.

Expanding application of theory of plane motion of rigid body

HUANG Lin, ZHOU Jin-nan

(1. Department of Civil Construction, Nanchang Institute Of Aeronautical Technology Nanchang 330034; 2. Zhejiang Jiaxing College, Jiaxing 314000, China)

Abstract: The conception of rigid body making plane motion is expanded to particle system which make plane motion in the paper. It is taken as moving frame of reference to solve composite motion problem. The results using new method presented in the paper is consistent with the method of polar coordinates.

Key words: plane motion; relative motion; polar coordinate

(上接第 143 页)

参考文献:

- [1] 尹传存. 关于破产概率的一个局部定理[J]. 中国科学 A 辑, 2004, 34(2): 192—202.
- [2] 唐启鹤. 重尾索赔下关于破产概率的一个等价式. 中国科学 A 辑, 2002, 32(3): 260—266.
- [3] Grandell J. Aspects of Risk Theory[M]. New York: Springer Verlag, 1991.
- [4] Tang Qihe. Ruin probabilities for large claims in renewal risk model [A]. Proceeding of Third Symposium of Post-graduates of USTC[C]. 2000, 196—201.
- [5] 孔繁超, 曹龙. 更新风险模型和延迟更新风险模型中破产概率的若干结果[J]. 数学年刊, 2003, 119—128.

A Tail Equivalence Relationship of Ruin Probability in Renewal Risk Model

PENG Dan^{1,2}, LIU Dong-hai^{1,2}

(1. Department of Mathematics, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201; 2. Department of Mathematics, Central South University, Changsha 410075, China)

Abstract: The paper presents a renewal risk model. Under the assumption that the claim size is heavy-tailed, when the claim size distribution satisfies a certain condition, we get the same tail equivalence relationship of ruin probability as in the classic risk model.

Key words: heavy-tailed distribution; ruin probability; renewal risk model