文章编号:1005－0523(2005)05－0162－02

双险种二项风险模型的破产概率

刘东海,刘再明

(中南大学 数学科学与计算技术学院,长沙,410075)

摘要:讨论了索赔过程和保费收取次数均为二项分布的双险种风险模型,得到了其破产概率的一般公式和lundberg不等式.

关 键 词:双险种;破产概率;二项风险模型

中图分类号:O211.62　　**文献标识码**:A

1 模型的引入

在经典风险模型中,顾客索赔到达是用一个poisson过程来描述的.近年来,在许多文献中,对经典风险模型进行了推广,得到了许多比较完善的结果.[1]中考虑了索赔到达为二项分布,保费收取为poisson过程的风险模型.[2]中考虑了保费收取次数为poisson过程,索赔到达分布为poisson和二项分布的双险种风险模型,本文将讨论保费收取次数和索赔到达均服从二项分布的双险种风险模型.模型如下:

$$X(n)=u+cM(n)-Y(n)-Z(n),$$

$$S(n)=cM(n)-Y(n)-Z(n),$$

$$Y(n)=\sum_{i=1}^{N(n)}Y_i,\ Z(n)=\sum_{k=1}^{B(n)}Z_k$$

设 $u>0$, $c>0$, u 是保险公司初始资本, c 是保险公司单位时间收取的保费.以下随机变量都定义在完备概率空间(Ω,F,P)上.

1) $\{Y_i, i=1,2,3...\}$, $\{Z_k, k=1,2,3...\}$ 是取值于$(0,+\infty)$的独立同分布的随机变量序列, Y_i 为险种1的第 i 次索赔量, Z_k 为险种2的第 k 次索赔量,假定;

$E[Y_i]=u_1$, $E[Z_k]=u_2$, $D[Y_i]=\delta_1^2$, $D[Z_k]=\delta_2^2$;

2) $\{M_n, n=1,2,3...\}$ 为时间段$[0,n]$内保单总数,服从二项过程,即.

$$P(M(n)=k)=C_n^k p^k q^{n-k};$$

3) $\{N_n, n=1,2,3...\}$ 为时间段$[0,n]$内险种1赔付次数,服从二项过程,即;

$$P(N(n)=k)=C_n^k \upsilon^k \omega^{n-k};$$

4) $\{B_n, n=1,2,3...\}$ 为时间段$[0,n]$内险种2赔付次数,服从二项过程,即;

$$P(B(n)=k)=C_n^k b^k d^{n-k};$$

5) $\{M_n, n=1,2,3...\}$, $\{N_n, n=1,2,3...\}$, $\{B_n, n=1,2,3...\}$ 是相互独立的二项过程,且与 $\{Y_i, i=1,2,3...\}$, $\{Z_k, k=1,2,3...\}$ 相互独立;

6) $X(n)$是保险公司在时刻 n 的盈余资本.

为保证公司稳定经营,假定单位时间内平均保费收入大于平均理赔额,即 $cp>u_1\upsilon+u_2 b$.

由此定义安全负荷系数 $\rho=\dfrac{cp}{u_1\upsilon+u_2 b}-1>0$.定义破产时刻: $T_u=\inf\{n\geq1; X(n)<0\}$,最终破产概率 $\Psi(u)=P(\{T_u<\infty\mid X(0)=u\})$.不失一般性,假定存在 $\gamma>0$,使得 $M_Y(\gamma)=E[e^{\gamma Y}]<\infty$, $M_z(\gamma)=E[e^{\gamma Z}]<\infty$.矩母函数存在区间为$(-\infty, Z)$.

收稿日期:2005－06－25

作者简介:刘东海(1979－),男,研究方向:随机过程与金融风险.

2 主要结果

引理 2.1 盈利过程$\{S_n, n=1,2,3...\}$是有下列性质:

(1) $ES(n)=n(cp-u_1 \upsilon+u_2 b)>0$;(2)具有平稳独立增量性.

定理 2.2 ①存在正数 γ,使得 $E[e^{-rS(n)}]<\infty$.

②存在函数 $g(\gamma)=\ln(pe^{-rc}+q)(M_Y(r)v+w)(M_z(r)b+d)$,使得 $E[e^{-rS(n)}]=e^{ng(r)}$.

证明 ①记 $w_i=S(i)-S(i-1)$, $1\leq i\leq n$. 则 $S(n)=w_n+w_{n-1}+...+w_1$,

易知 w_i 相互独立同分布. $Ew_i=E[S(i)]-E[S(i-1)]=p-u_1v-u_2b<+\infty$,故$\{w_i\}$服从强大数定律.

记 $W=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}w_i=\frac{1}{n}S(n)$,则 $E[W]=p-u_1v-u_2b$.

由强大数定律,以概率1有 $\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{n}=p-u_1v-u_2b>0$.

故存在一个随机变量 T 为$\{Y_i\}$,$\{Z_k\}$,$\{M(n)\}$,$\{B(n)\}$,$\{N(n)\}$的函数,

当 $n>T$ 时,以概率1有 $S(n)>0$,

而在 T 之前,只有有限保单收到次数和索赔次数,则以概率为1有$|S(n)|<\infty$, $n\leq T$.

故$\exists$ r >0,使 $E[e^{-rS(n)}|n\leq T]<\infty$, $E[e^{-rS(n)}|n>T]<\infty$

则 $E[e^{-rS(n)}]=E[e^{-rS(n)}|n\leq T]\cdot p(n\leq T)+E[e^{-rS(n)}|n>T]\cdot p(n>T)<\infty$.

②证明:记 $E[e^{-rS(n)}]=E[e^{-crM(n)}]E[e^{rY(n)}]E[e^{rZ(n)}]=e^{n\ln(pe^{-rc}+q)(M_Y(r)v+w)(M_z(r)b+d)}$

又 $E[e^{-rS(n)}]\neq 0$,由①知 $E[e^{-rS(n)}]$在任意有限区间内有界,

故存在函数 $g(r)$,使得 $E[e^{-rS(n)}]=e^{ng(r)}$.

所以 $g(r)=\ln(pe^{-rc}+q)(M_Y(r)v+w)(M_z(r)b+d)$.

定理 2.3 关于未知数 r 的方程$(pe^{-rc}+q)(M_Y(r)v+w)(M_z(r)b+d)=1$有一正根 $r=R$,定义 $R=\inf\{r|g(r)=1, r>0\}$为调节系数.

证明 令 $g(r)=(pe^{-rc}+q)(M_Y(r)v+w)(M_z(r)b+d)$

显然 $g(0)=1$, $g(0)=-cp+u_1r+u_2b<0$. 可知对充分小的$\triangle r\in(0,Z)$有 $g(\triangle r)<1$.

当 $r\to Z$ 时,$g(r)\to\infty$故必存在 $r^*\in(0,Z)$,使 $g(r^*)=1$.

又易知$\forall\ \varepsilon>0$,当 $r\in(r^*-\varepsilon, r^*)$时,$g(r)<1$;当 $r\in(r^*, r^*+\varepsilon)$时,$g(r)>1$.

故 $R=\inf\{r|g(r)=1, r>0\}$是方程 $g(r)=1$的正解.

定理 2.4 在风险过程$\{X_n, n=1,2,3...\}$下,设 R 为调节系数,则

$\Psi(u)=\frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RX(T_u)}|T_u<+\infty]}$. 特别地:$\Psi(u)\leq e^{-Ru}$, $\forall$ u≥ 0.

证明 对 $n\geq 1$ 和 $r>0$,我们考察

$$E[e^{-rX(n)}]=E[e^{-rX(n)}|T_u<n]\cdot p(T_u<n)+E[e^{-RX(n)}|T_u\geq n]\cdot p(T_u\geq n) \quad (1)$$

因为 $X(n)=u+cM(n)-Y(n)-Z(n)$,

故(1)式左端可写为:$E[e^{-rX(n)}]=e^{-ru}\cdot E[e^{-rcM(n)}]\cdot E[e^{rY(n)}]\cdot E[e^{rZ(n)}]$

$=e^{-ru}\cdot[(pe^{-rc}+q)(M_Y(r)v+w)(M_z(r)b+d)]^n$

而(1)式右端第一项中,$X(n)$可写为

$X(n)=X(T_u)+(M(n)-M(T_u))+(Y(n)-Y(T_u))+(Z(n)-Z(T_u))$,

对于给定的 T_u:$M(n)-M(T_u)$, $Y(n)-Y(T_u)$, $Z(n)-Z(T_u)$, $R(T_u)$是相互独立的.

有 $E[e^{-rX(n)}|T_u\leq n]\cdot p(T_u\leq n)$

$=E[e^{-rX(T_u)}|T_u\leq n]E[e^{-r(M(n)-M(T_u))}|T_u\leq n]E[e^{-r(Y(n)-Y(T_u))}|T_u\leq n]\cdot E[e^{-r(Z(n)-Z(T_u))}|T_u\leq n]\cdot p(T_u\leq n)$

$=E[e^{-rX(T_u)}|T_u\leq n]\cdot p(T_u\leq n)\cdot[(pe^{-rc}+q)(M_Y(r)v+w)(M_z(r)b+d)]^{(n-T_u)}$

选择 $r=R$,则(1)式变为

$$e^{-Ru}=E[e^{-RX(T_u)}|T_u\leq n]\cdot p(T_u\leq n)+E[e^{-RX(T_u)}|T_u>n]\cdot p(T_u>n) \quad (2)$$

令 $n\to\infty$,则上式右端第一项变为 $E[e^{-RX(n)}|T_u<\infty]\cdot p(T_u<\infty)$

若能证明当 $n\to\infty$时,右端第二项为零,则定理得证,以下将证明这点:

记 $\alpha=cp-u_1r-u_2b>0$, $\beta^2=c^2pq+v\delta_1^2+vwu_1^2+b\delta_2^2+bdu_2^2$

(下转第166页)

[6] J.K. Merikoski, A.Virtanen. Bounds for eigenvalues using the trace and determant, Linear Algebra Appl, 264: 101 – 108 (1997).

[7] J.K.Merikoski, A.Virtanen, Best possible bounds for eigenvalues using the trace and determant, manuscipt.

[8] B.Papendieck, P. Rechkt, On the maximal entries in the principal eigenvectors of graphs, Linear Algebra Appl, 310: 129 – 138(2000).

[9] H. Wolkowicz, G.P.H. Styan, Bounds for eigenvalues using traces, Linear Algebra Appl, 29: 471–506(1980).

Evaluating Bounds for Eigenvalues Using Traces and Determinants

LI Shu-dong[1], LI Chen-shun[2]

(1. College of Mathematics, Shandong Institute of Business and Technology, Yantai 264005; 2. Department of Computer and Information Science, Yantai Education College, Yantai 264001, China)

Abstract: Let A be a square matrix with real and positive eigenvalues $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \lambda_n > 0$, and let $1 \leq k \leq l \leq n$, we will find upper bounds for $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$ and $\lambda_k + \lambda_{k+1} + \cdots \lambda_k$, then compare them with the old ones.

Key words: trace; determinant; eigenvalues

(上接第 163 页)

易知 $Var(R(n)) = \beta^2$. 由于 $\alpha > 0$, 考察 $\triangle = u + n\alpha - \beta n^{\frac{2}{3}}$ 只要 n 充分大, 它是正的.

利用 $X(n)$ 和 $\triangle$ 的大小关系将(2)式右端第二项拆为两项有

$$E[e^{-RX(n)} | T_u > n, 0 \leq X(n) \leq \triangle] \cdot p(T_u > n, 0 \leq X(n) \leq \triangle) + E[e^{-RX(n)} | T_u > n, X(n) > \triangle] \cdot p(T_u > n, X(n) > \triangle) \leq p(0 \leq X(n) \leq \triangle) + e^{-R\triangle} \quad (3)$$

由契比雪夫不等式 $P(0 \leq X(n) \triangle y) \leq \frac{Var(X(n))}{\beta^2 n^{\frac{4}{3}}} = n^{-\frac{1}{3}}$

故当 $n \to \infty$ 时, (3)式右端将为零

故在(2)式中, 令 $n \to \infty$, 有 $e^{-Ru} = E[e^{-RX(T_u)} | T_u < \infty] \cdot P(T_u < +\infty)$

即 $\Psi(u) = \dfrac{e^{-Ru}}{E[e^{-RX(T_u)} | T_u < +\infty]}$,

又因 $X(T_u) < 0$, 故 $E[e^{-rX(T_u)} | T_u < \infty] > 1$

可得 $\Psi(u) \leq e^{-Ru}$, $\forall u \geq 0$. 定理得证.

参考文献:

[1] 龚日朝, 杨向群. 广义复合二项风险模型下的生存概率[J]. 湘潭大学自然科学学报, 2001, 22(6)

[2] 李芳芳, 罗炎. 一类广义离散双险种风险模型[J]. 数学理论与应用 2004, 24(4).

[3] Grandell J. Aspects of Risk Theory [M]. New York: Springer Verlag, 1991.

[4] 蒋志明, 王汉兴. 一类多险种风险过程的破产概率[J]. 应用数学与计算数学学报, 2000, 14(1).

[5] 郑韫瑜, 余跃年译. N.L. 鲍尔斯风险理论[M]. 上海科学技术出版社, 1995.

[6] Xueyuan wu, Kam C. Yuen A discrete time risk model with interaction between classes of business[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2002.

Ruin Probability in Binomial Model for Two-type-risk Insurance

LIU Dong-hai, LIU Zai-ming

(School of Mathematical Science and Computing Technology, Central South University, Changsha 410075, China)

Abstract: In this paper, We discuss ruin probabilities in binomial model for two-type risk insurance. Then we get Lundberg inequality and formula of the ruin probabilities.

Key words: two-type insurance; ruin probability; binomial model