

文章编号: 1005—0523(2005)05—0164—03

利用矩阵的迹与行列式估计特征值的界

李树栋¹, 李臣顺²

(1. 山东工商学院 数学学院, 山东 烟台 264005; 2. 山东烟台教育学院 计算机与信息科学系, 山东 烟台 264001)

摘要: 设 A 是具有正实数特征值 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$ 的一个方阵, 令 $1 \leq k \leq l \leq n$, 我们得到 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$ 和 $\lambda_k + \lambda_{k+1} + \dots + \lambda_l$ 的上界, 并将得到的界与原有的上界做了简单比较.

关键词: 迹; 行列式; 特征值

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

1 引言

设 $A \in C^{n \times n}$ ($n \geq 2$) (C 为复数域), 且具有正特征值 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$, 我们的目的在于利用 $\text{tr} A$ 、 $\det A$ 来估计 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$ 的界, 特别的我们可以得到单个特征值的界. 对于 λ_1 、 λ_2 的界已经在[3]中讨论过. 对于 $\frac{\lambda_1}{\lambda_n}$, 其上界可在[1]中找到, 文献[4]、

[6]讨论了 $\frac{\lambda_1}{\lambda_n}$ 可能达到的最好的上界.

在所有不等式中, 等号都可以取到(参看[6]), 对于某些不等式, 其等号成立的条件具有一般性: $k=1$, $l=n$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$. 但是大多数不等式具有下列性质: 给定 k , 存在方阵 A , 使得不等式的等号成立.

在[9]中, 作者利用 $k, l, n, \text{tr} A, \text{tr} A^2$, 给出了 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$ 的可能达到的最好下界, 我们称这个下界为 Wolkowicz—Styan 界(简称 WS 界), 在这个界中 A 的特征值为实数就足够了, 并没有要求特征值为正的.

定理 1.1 ([9]中的定理 2.1) 设 $1 \leq k \leq n$,

则当 $k \leq n/2$ 时, 有 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k \geq k \sqrt{\frac{\text{tr} A}{n}}$

$$\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}(\text{tr} A^2 - \frac{(\text{tr} A)^2}{n})};$$

$$\text{当 } k \geq n/2 \text{ 时, } \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k \geq k \frac{\text{tr} A}{n} + (n-k) \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}(\text{tr} A^2 - \frac{(\text{tr} A)^2}{n})}.$$

在本文中, 我们对下面定理中的下界做了一些改进, 得到了一个更好的新的下界, 结果比较优美, 并且将得到的新界与原有的界作了比较.

2 主要结果

在[2]中, 作者提出了 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k, 1 \leq k \leq n$ 的两个上界, 下面给予介绍.

定理 2.1 ([7]) 设 $1 \leq k \leq n$, 则 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k \leq \text{tr} A - (n-k) \left[\left(\frac{k}{\text{tr} A} \right)^k \cdot \det A \right]^{1/(n-k)}.$ (1)

证明 这个结论来自下列不等式:

$$\frac{p_1 x_1 + \dots + p_n x_n}{p_1 + \dots + p_n} \geq (x_1^{p_1} + \dots + x_n^{p_n})^{1/(p_1 + \dots + p_n)},$$
$$p_i > 0, i = 1, 2, \dots, n.$$

定理 2.2 ([7]) 设 $1 \leq k \leq n$, 则 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k \leq \frac{k+1}{\det A} \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \left(\frac{\text{tr} A}{n+1}\right)^{n+1}.$ (2)

收稿日期: 2005—03—15

作者简介: 李树栋(1979—), 男, 山东潍坊人, 研究方向: 密码学与信息安全.

为了得到我们的新的下界,需要引入下列引理,其证明非常简单.

引理 2.3 设 $\{d_i\}$ 是一实数列, $i=1, 2, \dots, n$, 令 $D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i$, $d = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t d_i$, $1 \leq t \leq n$, 则有: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i^2 \geq D^2 + \frac{t}{n-t} (D-d)^2$, 且等号成立时当且仅当 $d_1 = \dots = d_t$, 和 $d_{t+1} = \dots = d_n$ 成立.

证明 $e = \frac{1}{n-t} \sum_{i=t+1}^n d_i = \frac{nD-d}{n-t}$, 根据 Cauchy 一Schwarz 不等式有: $\sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^t d_i^2 + \sum_{i=t+1}^n d_i^2 \geq \frac{(\sum_{i=1}^t d_i)^2}{t} + \frac{(\sum_{i=t+1}^n d_i)^2}{n-t}$

$$= td^2 + (n-t)e^2 = td^2 + \frac{(nD-d)^2}{n-t}$$

$$= nD^2 + \frac{nt}{n-t} (D-d)^2$$

不等式两边同除以 n 可到结果, 并且当等号成立时, 上述不等号应全为等号, 即可得结论.

引理 2.4 ([1]) 若 $q_1, \dots, q_n$ 是正实数, 则对于任意实数 $p_1, \dots, p_n$, 有 $\min_{1 \leq i \leq n} \{ \frac{p_i}{q_i} \} \leq \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{\sum_{i=1}^n q_i} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{ \frac{p_i}{q_i} \}$ 成立, 且两边的等号成立当且仅当 $\frac{p_1}{q_1} = \dots = \frac{p_n}{q_n}$ 成立.

由此我们得出下列结果:

定理 2.5 设 $1 \leq k \leq n$, 则 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k \leq k \{ \frac{\text{tr} A}{n} + \sqrt{\frac{n-k}{nk} (\text{tr} A^2 - \frac{(\text{tr} A)^2}{n})} \}$. (3)

证明 由于 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \text{tr} A$, $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 = \text{tr} A^2$.

$$\text{令 } D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i = \frac{\text{tr} A}{n}, \quad d = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_i,$$

由引理 2.3 知, $\frac{\text{tr} A^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2}{n} \geq D^2 + \frac{k}{n-k} (D-d)^2 = (\frac{\text{tr} A}{n})^2 + \frac{k}{n-k} (\frac{\text{tr} A}{n} - \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{k})^2$.

由 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_n > 0$, 又由上面引理 2.4 有 $\frac{\text{tr} A}{n} \leq \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{k}$, 从而得到结论.

例: 设 $A = \text{diag}(8, 7, 1, 1, 1)$, 容易计算 $\det A = 56$, $\text{tr} A = 8+7+1+1+1=18$, $\text{tr} A^2 = 8^2+7^2+1^2+1^2+1^2=116$.

下面估计 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的界:

由(1)式知 $\lambda_1 + \lambda_2 \leq \text{tr} A - (5-2) [(\frac{2}{\text{tr} A})^2 \cdot \det A]^{1/5-2} = 18-3[(\frac{2}{18} \cdot 56)^{1/3}] \approx 15.35$,

由(2)式知 $\lambda_1 + \lambda_2 \leq \frac{2+1}{\det A} \cdot (1+\frac{1}{2})^2 (\frac{\text{tr} A}{5+1})^{5+1} = \frac{2+1}{56} \cdot (1+\frac{1}{2})^2 (\frac{18}{5+1})^{5+1} \approx 87.87$,

由(3)式知 $\lambda_1 + \lambda_2 \leq 2 \{ \frac{\text{tr} A}{5} + \sqrt{\frac{5-2}{10} (\text{tr} A^2 - \frac{(\text{tr} A)^2}{5})} \} \approx 15.04$,

可以看出我们由定理 2.5 得出的界比(1)式和(2)式的界更精确.

进一步由定理 2.5 可以得出 $\lambda_k + \lambda_{k+1} + \dots + \lambda_l$ 的界:

推论 2.6: $\lambda_k + \lambda_{k+1} + \dots + \lambda_l \leq (l-k+1) \{ \frac{\text{tr} A}{n} + \sqrt{\frac{n-l}{nl} (\text{tr} A^2 - \frac{(\text{tr} A)^2}{n})} \}$, $1 \leq k \leq l \leq n$.

证明 因为 $\lambda_k + \lambda_{k+1} + \dots + \lambda_l \leq (l-k+1) \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_l}{l}$, (4)

其中对于 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_l$,

由定理 2.5 可知 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_l \leq l \{ \frac{\text{tr} A}{n} + \sqrt{\frac{n-l}{nl} (\text{tr} A^2 - \frac{(\text{tr} A)^2}{n})} \}$, 代入(4)式得

$\lambda_k + \lambda_{k+1} + \dots + \lambda_l \leq (l-k+1) \{ \frac{\text{tr} A}{n} + \sqrt{\frac{n-l}{nl} (\text{tr} A^2 - \frac{(\text{tr} A)^2}{n})} \}$ 得证.

参考文献:

- [1] H. W. Guggenheimer, A. S. Edelman and C. R. Johnson, A simple estimate of the condition number of a linear system, College Math. J. 26:12-5(1995).
- [2] R. Kumar, Bounds for eigenvalues, Thesis, Dept. of Mathematics, Univ. of Alberta, 1984.
- [3] J. K. Merikoski, U. Urpala and A. Virtanen, Upper bounds for the radio of the largest and smallest eigenvalues, Report A. 307, Dept. of Mathematics Sciences, Univ. of Tampere.
- [4] J. K. Merikoski, U. Urpala and A. Virtanen, T. Tam and F. Uhlig, A upper bound for the 2 condition number of a matrix, Linear Algebra Appl, 254:355-365(1997).
- [5] J. K. Merikoski, A. Virtanen, Bounds for eigenvalues using the trace and determinant, Report A 308, Dept. of Mathematics Sciences, Univ. of Tampere, 1996.

[6] J. K. Merikoski, A. Virtanen. Bounds for eigenvalues using the trace and determinant, Linear Algebra Appl, 264, 101 – 108 (1997).

[7] J. K. Merikoski, A. Virtanen, Best possible bounds for eigenvalues using the trace and determinant, manuscript.

[8] B. Papendieck, P. Reicht, On the maximal entries in the principal eigenvectors of graphs, Linear Algebra Appl, 310, 129 – 138 (2000).

[9] H. Wolkowicz, G. P. H. Styan, Bounds for eigenvalues using traces, Linear Algebra Appl, 29, 471 – 506 (1980).

Evaluating Bounds for Eigenvalues Using Traces and Determinants

LI Shu-dong¹, LI Chen-shun²

(1. College of Mathematics, Shandong Institute of Business and Technology, Yantai 264005; 2. Department of Computer and Information Science, Yantai Education College, Yantai 264001, China)

Abstract: Let A be a square matrix with real and positive eigenvalues $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$, and let $1 \leq k \leq n$, we will find upper bounds for $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$ and $\lambda_k + \lambda_{k+1} + \dots + \lambda_n$, then compare them with the old ones.

Key words: trace; determinant; eigenvalues

(上接第 163 页)

易知 $\text{Var}(R(n)) = \beta^2$. 由于 $\alpha > 0$, 考察 $\Delta = u + n\alpha - \beta n^{\frac{2}{3}}$ 只要 n 充分大, 它是正的.

利用 $X(n)$ 和 Δ 的大小关系将 (2) 式右端第二项拆为两项有

$$E[e^{-RX(n)} | T_u > n, 0 \leq X(n) \leq \Delta] \cdot p(T_u > n, 0 \leq X(n) \leq \Delta) + E[e^{-RX(n)} | T_u > n, X(n) > \Delta] \cdot p(T_u > n, X(n) > \Delta) \leq p(0 \leq X(n) \leq \Delta) + e^{-R\Delta} \quad (3)$$

由契比雪夫不等式 $P(0 \leq X(n) \leq \Delta) \leq \frac{\text{Var}(X(n))}{\beta^2 n^{\frac{4}{3}}} = n^{-\frac{1}{3}}$

故当 $n \rightarrow \infty$ 时, (3) 式右端将为零

故在 (2) 式中, 令 $n \rightarrow \infty$, 有 $e^{-Ru} = E[e^{-RX(T_u)} | T_u < \infty] \cdot P(T_u < +\infty)$

$$\text{即 } \Psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RX(T_u)} | T_u < +\infty]},$$

又因 $X(T_u) < 0$, 故 $E[e^{-RX(T_u)} | T_u < \infty] > 1$ 可得 $\Psi(u) \leq e^{-Ru}$, $\forall u \geq 0$. 定理得证.

参考文献:

- [1] 龚日朝, 杨向群. 广义复合二项风险模型下的生存概率[J]. 湘潭大学自然科学学报, 2001, 22(6)
- [2] 李芳芳, 罗炎. 一类广义离散双险种风险模型[J]. 数学理论与应用 2004, 24(4).
- [3] Grandell J. Aspects of Risk Theory [M]. New York: Springer Verlag, 1991.
- [4] 蒋志明, 王汉兴. 一类多险种风险过程的破产概率[J]. 应用数学与计算数学学报, 2000, 14(1).
- [5] 郑韞瑜, 余跃年译. N. L. 鲍尔斯风险理论[M]. 上海科学技术出版社, 1995.
- [6] Xueyuan wu, Kam C. Yuen A discrete time risk model with interaction between classes of business[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2002.

Ruin Probability in Binomial Model for Two-type-risk Insurance

LIU Dong-hai, LIU Zai-ming

(School of Mathematical Science and Computing Technology, Central South University, Changsha 410075, China)

Abstract: In this paper, We discuss ruin probabilities in binomial model for two-type risk insurance. Then we get Lundberg inequality and formula of the ruin probabilities.

Key words: two-type insurance; ruin probability; binomial model