

文章编号: 1005—0523(2006)01—0148—02

混合进制广义 Walsh 变换的快速算法

王广超, 廖国勇

(华东交通大学 基础科学学院, 江西 南昌 330013)

摘要: 使用矩阵分解技术, 提出了混合进制广义 Walsh 函数的一种新的复制方法, 设计了混合进制 Walsh 函数阵的两种快速算法.

关 键 词: Walsh 函数; 混合进制; 矩阵复制理论; 快速算法

中图分类号: O174, TN911

文献标识码: A

1 引言

Walsh 函数是美国数学家 Walsh 于 1923 年提出的一类完备正交函数系, 特点是每个函数仅取 +1、-1 两个值. 由于 Walsh 变换只涉及加减运算, 快速算法的计算复杂度比 FFT、FCT 要小, 且更容易在计算机上实现, 使 Walsh 函数在数字信号处理、图像编码、小波分析、分形研究、遥控测控等诸多方面得到了广泛应用. 对于 Walsh 函数与 Walsh 序码复制理论研究, 国内一些学者取得了重要成果: 张其善^[1,2]等提出平移与对称复制理论, 较好地解决了二进制与多进制广义 Walsh 函数的复制问题; 王能超^[3]等提出二分演化模式, 在 Walsh 函数计算机快速生成上, 提供了一种途径; 施保昌^[4,5]等使用的矩阵方法, 能够较好解决 Walsh 函数阵复制问题.

对一般的 Walsh 函数复制生成, 文[1, 2, 6]作了详细讨论, 对混合进制的广义 Walsh 函数研究, 文[7]给出了混合进制 Walsh 定义, 在其基础上, 文[8]讨论了混合平移复制方法. 本文针对混合进制广义 Walsh 函数阵, 采用矩阵块复制方法, 给出了一种新的复制算法, 相比文[8], 算法简单易处理; 对混合进制 Walsh 函数 Hadamard 阵, 设计了两种快速算

法.

2 混合进制广义 Walsh 函数矩阵复制方法

设 $(N_{n-1}, N_{n-2}, \dots, N_0)$ 为一 p 进制 Walsh 函数数列, 其中 $N_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, $i=0, 1, \dots, n-1$, 那么 $N(N=p^n)$ 个 Walsh 函数对应的 Hadamard 阵为 H_N . 首先考虑三进制情形, 设 $\omega^3=1$ 的三个不同的根 1、 a 、 b 其中有如下关系成立:

$$a^2=b, b^2=a, a^3=b^3=ab=1 \quad (1)$$

对三阶三值 Walsh 矩阵有:

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & b & a \end{bmatrix} \quad (2)$$

定义平移复制算子 C , 对于矩阵 A_N :

$CA_N = A_N = A_N I_N$, 其中 I_N 为单位阵.

有以上关系, 可定义组合算子:

$$H_3^0 = \triangleleft \begin{bmatrix} C & C & C \\ C & aC & bC \\ C & bC & aC \end{bmatrix} \quad (3)$$

从而可以得到三值 Hadamard 阵的复制方法:

收稿日期: 2005—10—16

基金项目: 华东交通大学校研基金资助

作者简介: 王广超(1978—), 男, 山东微山人, 硕士, 讲师.

$$H_N = \begin{bmatrix} H_{N/3} & H_{N/3} & H_{N/3} \\ H_{N/3} & aH_{N/3} & bH_{N/3} \\ H_{N/3} & bH_{N/3} & aH_{N/3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C & C & C \\ C & aC & bC \\ C & bC & aC \end{bmatrix} \otimes H_{N/3}$$

$$= H_3^0 \otimes H_{N/3} = \dots = H_3^{0 \otimes (n-1)} \otimes H_3 = H_3^{0 \otimes n} \otimes [1] \quad (4)$$

其中 $N=3^n$.

对于 p 进制情形,令 $\omega^p=1$ 的 p 个不同复根为 $1, \gamma, \gamma^2, \dots, \gamma^{p-1}$, 则

$$H_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \gamma & \dots & \gamma^{p-1} \\ 1 & \gamma^{p-1} & \dots & \gamma \end{bmatrix} \quad (6)$$

定义广义组合算子:

$$H_p^c = \begin{bmatrix} C & C & \dots & C \\ C & \gamma C & \dots & \gamma^{p-1} C \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C & \gamma^{p-1} C & \dots & \gamma C \end{bmatrix} \quad (7)$$

对于 p 值 Hadamard 阵, 可以进行 H_p^c 广义复制:

$$H_N = H_p^{c \otimes n} \otimes [1], \text{ 其中 } N=p^n. \quad (8)$$

对于 $p_N = p_{n-1} p_{n-2} \dots p_1 p_0$ 个混合进制 $(N_{n-1}, N_{n-2}, \dots, N_1, N_0)$ 广义 walsch 函数, 对应的 Ladamard 阵为 H_N , 其中 N_i 为 p_i 进制, $i=0, 1, \dots, n-1$. 由 (6)、(7) 可定义广义组合算子 $H_{p_i}^c, i=0, 1, \dots, n-1$, 对 H_N , 可利用广义组合算子 $H_{p_i}^c$ 进行块复制:

$$H_N = H_{p_{n-1}}^c \otimes H_{p_{n-2}}^c \otimes \dots \otimes H_{p_0}^c \otimes [1] \quad (9)$$

3 混合进制广义 Walsh 变换的快速算法

对于 $p N_k = p_k p_{k-1} \dots p_1 p_0$ 个混合进制 $(N_k, \dots, N_1, N_0)$ 广义 walsch 函数, 对应的 Hadamard 阵为 H_{N_k} , 其中 N_i 为 p_i 进制, $i=0, 1, \dots, k, k=0, 1, \dots, n-1$. 则

$$H_N = H_{N_{n-1}} \quad (10)$$

对于 $H_{N_k}, k=0, 1, \dots, n-1$, 令 $\omega^p=1$ 的 p_k 个不同复根为 $1, \gamma_k, \gamma_k^2, \dots, \gamma_k^{p_k-1}$, 则根据 (6):

$$H_{p_k} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \gamma_k & \dots & \gamma_k^{p_k-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \gamma_k^{p_k-1} & \dots & \gamma_k \end{bmatrix} \quad (11)$$

由 (7), (11):

$$H_{N_k} = \begin{bmatrix} H_{N_{k-1}} & H_{N_{k-1}} & \dots & H_{N_{k-1}} \\ H_{N_{k-1}} & \gamma_k H_{N_{k-1}} & \dots & \gamma_k^{p_k-1} H_{N_{k-1}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ H_{N_{k-1}} & \gamma_k^{p_k-1} H_{N_{k-1}} & \dots & \gamma_k H_{N_{k-1}} \end{bmatrix} \quad (12)$$

对 (12) 进行矩阵分解:

$$H_{N_k} = \begin{bmatrix} H_{N_{k-1}} & H_{N_{k-1}} & \dots & H_{N_{k-1}} \\ H_{N_{k-1}} & \gamma_k H_{N_{k-1}} & \dots & \gamma_k^{p_k-1} H_{N_{k-1}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ H_{N_{k-1}} & \gamma_k^{p_k-1} H_{N_{k-1}} & \dots & \gamma_k H_{N_{k-1}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} H_{N_{k-1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_{N_{k-1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & H_{N_{k-1}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_{N_{k-1}} & I_{N_{k-1}} & \dots & I_{N_{k-1}} \\ I_{N_{k-1}} & \gamma_k I_{N_{k-1}} & \dots & \gamma_k^{p_k-1} I_{N_{k-1}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ I_{N_{k-1}} & \gamma_k^{p_k-1} I_{N_{k-1}} & \dots & \gamma_k I_{N_{k-1}} \end{bmatrix}$$

$$\triangleq (I_{p_k} \otimes H_{N_{k-1}}) S_{N_k} \quad (13)$$

其中:

$$S_{N_k} = \begin{bmatrix} I_{N_{k-1}} & I_{N_{k-1}} & \dots & I_{N_{k-1}} \\ I_{N_{k-1}} & \gamma_k I_{N_{k-1}} & \dots & \gamma_k^{p_k-1} I_{N_{k-1}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ I_{N_{k-1}} & \gamma_k^{p_k-1} I_{N_{k-1}} & \dots & \gamma_k I_{N_{k-1}} \end{bmatrix} = H_{p_k} \otimes I_{N_{k-1}} \quad (14)$$

$I_{N_{k-1}}$ 表示与 $H_{N_{k-1}}$ 同阶单位阵, $k=1, 2, \dots, n-1$.

利用 (10)、(13) 进行递推, 可得:

算法 1:

$$H_N = H_{N_{n-1}} = (I_{N_{n-1}} \otimes H_{N_{n-2}}) I_{S_{N_{n-1}}}$$

$$= (I_{p_{n-1}} \otimes ((I_{p_{n-2}} \otimes H_{N_{n-3}}) S_{N_{n-2}})) S_{N_{n-1}} = (I_{p_{n-1}} \times p_{n-2} \otimes H_{N_{n-3}}) (I_{p_{n-1}} \otimes S_{N_{n-2}}) S_{N_{n-1}}$$

$$= \dots$$

$$= (I_{\prod_{i=n-1}^1 p_i} \otimes H_0) (\prod_{i=1}^{n-2} (I_{\prod_{j=i+1}^1 p_j} \otimes S_{N_i})) S_{N_{n-1}} \quad (15)$$

算法 2:

因为 $H_{N_i} (i=0, 1, \dots, n-1)$ 阵为对称阵, $H_{N_i} = (H_{N_i})^T$, 利用 (15) 与 Kronecker 乘积性质得:

(下转第 152 页)

是加法逆半群同余, 先证 $(S, +)/\rho$ 是逆半群.

由文献[3]: 任何正则半群的同态像是正则的, 因 S 正则, 则 $(S, +)/\rho$ 是正则的. 又 $(S, +)/\rho$ 的幂等元是 e^ρ 的形式, $e \in E^{[+]}$, $\forall e, f \in E^{[+]}$ 由文献[3]有 $V(e+f) = E(e+f) = E(f+e) = V(f+e) \Rightarrow (e+f, f+e) \in \rho \Rightarrow e^\rho + f^\rho = f^\rho + e^\rho$ 即 $(S, +)/\rho$ 中的幂等元可换, 由文献[3]结论 $(S, +)/\rho$ 是逆半群. 则 ρ 是逆半群同余, 所以 ρ 是加法可逆双半环同余. 最后, 同定理 1 可证得 ρ 的最小性.

参考文献:

- [1] 谢祥云, 等. 关于双半环[J]. 兰州大学学报(自然科学版), 1995, 31(4): 16~21.
- [2] SUN Yongli. Congruences on Some Quasi-Completely Regular Semirings. [J]. 北京大学学报(自然科学版), 2004, 40(5).
- [3] J. M. Howie. An introduction to Semigroup Theory. London: Academic Press, 1976.
- [4] J. S. Golan. The Theory of Semirings with Application in Mathematics and Theoretical Computer Science [J]. Pitman Monographs and Surveys in Pure Applied Mathematics, Vol. 54, Longman, New York, 1992.
- [5] 陈培慈. 半环理论与语言和自动机[M]. 南昌: 江西高校出版社, 1993.

Some Congruences on Bi-semirings and Properties

ZHANG Wei, ZUO Liming, WANG Song-sheng, QU Cong

(Institute of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China)

Abstract: In this paper, some congruences on bi-semirings have been studied. The bi-semiring congruences are characterized by their additive semigroups. Some profound properties for the bi-semiring congruence are obtained.

Key words: bi-semiring; inverse semigroup congruence; bi-semiring congruence; group congruence; ideal

(上接第 149 页)

$$H_N = S_{N_{n-1}} \left(\prod_{i=n-2}^1 \left(I_{\prod_{j=1+1}^{n-1} p_j} \otimes S_{N_i} \right) \left(I_{\prod_{i=n-1}^1 p_i} \otimes H_0 \right) \right) \quad (16)$$

参考文献:

- [1] 张其善, 张有光. 桥函数理论及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 1992.
- [2] 饶雪芳, 张其善. 广义桥函数理论及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 1998.
- [3] 李青, 王能超. 快速 Walsh 变换的二分算法[J]. 中山大学学报论丛, 1996, 5: 12~15.
- [4] 施保昌, 郭照立, 王能超. 斜 Haar 类变换的演化生成和快速算法[J]. 计算数学, 2003, 1(1): 1~7.
- [5] 刘向华. 广义 Walsh 函数的演化生成及其快速算法[硕士学位论文]. 华中科技大学图书馆, 2001.
- [6] 张其善, 王钢, 金明录. 信号的复制生成理论及其在通信中的应用[J]. 航空学报(增), 2001, 22: s30~s33.
- [7] 张公礼, 潘爱玲. 数字谱方法的理论与应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 1992.
- [8] 张其善, 张风元, 吴今培. 混合进制广义沃尔什函数的复制生成[J]. 电子学报, 2001, 29: 1944~1946.

Fast Algorithms of Generalized Walsh Function for Hybrid Carry System

WANG Guang-chao, LIAO Guo-yong

(School of Natural Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: By using the techniques of matrix analysis, a new copy method of generalized Walsh function for hybrid carry system is proposed and two fast algorithms are designed in the paper.

Key words: Walsh function; hybrid carry system; matrix copy theory; fast algorithm