

文章编号: 1005—0523(2006)01—0150—03

双半环上的同余及其性质

张 伟, 左黎明, 王颂生, 屈 聪

(江西师范大学 数学与信息科学学院, 江西 南昌 330022)

摘要:研究了双半环上的同余关系, 并利用其上的加法半群对双半环上的同余进行了刻画, 得到了一些比较深刻的性质.

关 键 词:双半环; 逆半群同余; 双半环同余; 群同余; 理想

中图分类号: O 153.3

文献标识码: A

1 引言

文献^[1]提出了一个比半环和分配格序半群更一般的概念—双半环, 讨论了双半环的一些基本性质, 并给出了一类双半环上的同余关系刻画. 本文将利用双半环上的加法半群对其上的同余进行刻画, 同时证明了某些双半环上的同余为最小双环同余和最小逆半环同余.

2 预备知识

定义 1 称一非空集合 S 为双半环, 如果 S 上定义有三个代数运算“+”, “*”, “ g ”, 且满足 (1) (S, g) , $(S, +)$, $(S, *)$ 均为半群, 且 $0 \in S$

(2) $\forall a, b, c \in S$ 有 (i) $a(b+c) = ab+ac$
 $(b+c)a = ba+ca$
(ii) $a(b*c) = ab*ac$ $(b*c)a = ba*ca$
(iii) $a+(b*c) = (a+b)*(a+c)$ $(b*c)+a = (b+a)*(c+a)$
(iv) $a*(b+c) = (a*b)+(a*c)$ $(b+c)*a = (b*a)+(c*a)$

从定义中可看出 $(S, +, g)$, $(S, *, g)$, $(S, +, *)$, $(S, *, +)$ 均为半环. 若 $(S, +, *)$ 还满足以

下条件 (v) $a*bc = (a*b)(a*c)$ $bc*a = (b*a)(c*a)$

(vi) $a+bc = (a+b)(a+c)$ $bc+a = (b+a)(c+a)$

则称双半环 $(S, +, *, g)$ 是可分配双半环.

例 设 Z^+ 是包含 0 的正整数集合, 那么 Z^+ 关于普通乘法“ g ”及以下定义的“+”“*”运算构成可分配双半环, 其中 $a+b = \max\{a, b\}$ $a*b = \min\{a, b\}$ ($\forall a, b \in Z^+$)

定义 2 若 $(S, +)$ 是一个交换 Abel 群, 则定义 1 中的双半环 $(S, +, *, g)$ 称为双环.

定义 3^[1] 称双半环 $(S, +, *, g)$ 是交换双半环, 如果 $(S, +)$, $(S, *)$ 是交换半群.

定义 4^[1,5] 双半环的一个子集 R 称为 S 的一个理想, 如果 R 满足

- (1) $0 \in R$
- (2) $\forall x, y \in R, x+y \in R$
- (3) $\forall x \in R, \forall s \in S, x*s, s*x \in R$
- (4) $\forall x \in R, \forall s \in S, sx, xs \in R$

如果 R 除满足以上四个条件外还满足:

- (5) $\forall r \in R, r+R = R$
- (6) $\forall s \in S, s+R = R+s$ 则称 R 为 S 的强理想.

收稿日期: 2005—06—07

作者简介: 张 伟(1974—), 男, 江西吉安人, 在读硕士研究生.

中国知网 <https://www.cnki.net>

定义 5^[1] 双半环 $(S, +, *, g)$ 的同余是指 S 上的一个等价关系 ρ , 且为半群 $(S, +), (S, *)$ 上的同余.

3 双半环上的同余刻画

引理 1^[1] 设 $(S, +, *, g)$ 为可换的双半环, 如果 R 为 S 的理想, 那么定义 $S \times S$ 上的二元关系 $\rho := \{(x, y) \mid x, y \in S, \exists i_1, i_2 \in R \text{ 使得 } x + i_1 = y + i_2\}$ 则 ρ 是 S 上的同余.

引理 2^[1] 设 R 为双半环 $(S, +, *, g)$ 的强理想, 在 S 上定义二元关系 σ 如下:

$\sigma = \{(x, y) \in S \times S \mid x + R = y + R\}$ 则 σ 是 S 上的同余.

引理 1 和引理 2 的证明请参考文献[1]

定义 1 若双半环 $(S, +, *, g)$ 的半群 $(S, +), (S, *), (S, g)$ 均是逆半群(即每个元有唯一的逆元), 则称 $(S, +, *, g)$ 为可逆半环.

定义 2 设 ρ 是双半环 $(S, +, *, g)$ 上的同余, 如果 S/ρ 是双环(或可逆双半环)则称 ρ 是 S 上的双环(可逆双半环)同余.

定理 1 设 $(S, +, *, g)$ 为可换的双半环, 且加法可逆, 则在 S 上定义二元关系 ρ 如下:

$\rho = \{(a, b) \in S \times S \mid \exists e, f \in E^{[+]}\text{ 使得 } a + e = b + f\}$, 其中 $E^{[+]} = \{a \in S \mid a + a = a\}$ 那么 ρ 是 S 上的最小双环同余.

证明 先证 $E^{[+]}$ 是 S 的理想. 显然

(1) $0 \in R$ (2) $\forall x, y \in E^{[+]}$ 有 $(x + y) + (x + y) = x + x + y + y = x + y$ 即 $x + y \in E^{[+]}$.

(3) $\forall x \in E^{[+]}, \forall x \in S, (x * s) + (x * s) = (x + x) * s = s$ 即 $s * s \in E^{[+]}$ 同理 $s * x \in E^{[+]}$

(4) $\forall x \in E^{[+]}, \forall x \in S, sx + sx = s(x + x) = sx$ 即 $sx \in E^{[+]}$, 同理 $xs \in E^{[+]}$

因此 $E^{[+]}$ 是 S 的理想. 由引理 1 可知 ρ 是双半环 S 上的同余.

下证 ρ 是 $(S, +)$ 上的最小群同余. 先证 S/ρ 是群. 显然 S/ρ 是半群, 由已知每个元素均有加法逆元. 设 $\forall e, f \in E^{[+]}$, 因为 $f + (e + f) = f + f + e = f + e = e + (e + f)$ 且 $e + f \in E^{[+]}$ 所以 $e \rho f$ 即 $E^{[+]}$ 中所有幂等元都在一个等价类中, 这样 S/ρ 中有唯一的单位元(零元). 则 S/ρ 是群, 即 ρ 是群同余. 下证 ρ 是最小群同余, 设 σ 是 S 上的任一群同余, 若 $a \rho \Rightarrow \exists e, f \in E^{[+]}, a + e = b + f \Rightarrow$ 在 S/σ 中有 $(a + e)\sigma = (b + f)\sigma \Rightarrow a\sigma + e\sigma = b\sigma + f\sigma$ ($f\sigma, e\sigma$ 是群

S/σ 中的幂等元, 即零元) $\Rightarrow a\sigma = b\sigma \Rightarrow a\sigma b \Rightarrow \rho \subseteq \sigma$ 得证. 由 S 的可换性, $(S, +)/\rho$ 是 *Abel* 群, 又 $(S, g)/\rho, (S, *)/\rho$ 是半群, 因此 S/ρ 是双环, 从而 ρ 是 S 上的双环同余. 最后证 ρ 是最小双环同余, 设 η 是 S 上任一双环同余, 因 S/η 是一双环, 则 $(S, +)/\eta$ 是一个群, 而 ρ 是最小群同余 $\Rightarrow \rho \subseteq \eta$ 所以 ρ 是 S 上的最小双环同余.

定理 2 设 $(S, +, *, g)$ 为可换的双半环, 且加法可逆, 则定义在 S 上的二元关系 $\sigma = \{(a, b) \in S \times S \mid a + E^{[+]} = b + E^{[+]}\}$ 为 S 上的最小双环同余.

证明 易证 $E^{[+]}$ 是 S 的强理想, 由引理 2 以及定理 1 的证明可知命题成立.

定义 3 称双半环 $(S, +, *, g)$ 为 *Orthodox* 双半环, 如果 $(S, +), (S, *), (S, g)$ (即正则半群 S 的幂等元构成一子半群)的是 *Orthodox* 半群.

引理 3 如果 $(S, +)$ 是 *Orthodox* 半群, 则 $\forall a, b \in S$, 如果 $a \in V(a), b \in (b)$, 则 $b + a$ 是 $a + b$ 的一个逆元.

引理 4 设 $(S, +)$ 是 *Orthodox* 半群, 则 $\forall a, b \in S$, 若 $V(a) = V(b) \neq \Phi$, 则 $V(a) = V(b)$, 采用文献[3]中完全类似的方法可以证明引理 1 和引理 2, 这里就不加赘述.

定理 3 设 $(S, +, *, g)$ 是一加法 *Orthodox* 双半环, 那么定义 S 上的二元关系 ρ 如下:

$\rho = \{(a, b) \in S \times S \mid V^{[+]}(a) = V^{[+]}(b)\}$, 则 ρ 是 S 上最小加法可逆双半环同余.

证明 显然 ρ 是 S 上的等价关系. 下证 ρ 是半群 $(S, +), (S, *), (S, g)$ 上的同余.

(1) 设 $(a, b) \in \rho, c \in S$ 对任一 $x \in V^{[+]}(a) = V^{[+]}(b), c \in V^{[+]}(c)$ 由引理 3 可得 $x + c' \in V^{[+]}(c + a) = V^{[+]}(c + b) \neq \Phi$ 由引理 4 得 $V^{[+]}(c + a) = V^{[+]}(c + b)$ 同理 $V^{[+]}(a + c) = V^{[+]}(a + b)$ 所以 $(c + a, c + b) \in \rho, (a + c, b + c) \in \rho$

(2) 设 $x \in V^{[+]}(a) = V^{[+]}(b), c \in s$, 则有 $a + x + a = a, x + a + x = x$ 因此 $c * a = c * (a + x + a) = (c * a) + c * (x + a) = c * a + c * x + c * a$ 同理 $c * x = c * x + c * a + c * x$ 即 $c * x \in V^{[+]}(c * a)$ 同理得 $c * x \in V^{[+]}(c * b)$ 则 $V^{[+]}(c * a) = V^{[+]}(c * b) \Rightarrow (c * a, c * b) \in \rho$ 同理得 $(a * c, b * c) \in \rho$

(3) 同理可证 $(ac, bc) \in \rho, (ca, cb) \in \rho$ 所以 ρ 是半群 $(S, +), (S, *), (S, g)$ 上的同余.

从而 ρ 双半环 $(S, +, *, g)$ 上的同余. 下证 ρ

是加法逆半群同余,先证 $(S,+)/\rho$ 是逆半群.

由文献[3]:任何正则半群的同态像是正则的,因 S 正则,则 $(S,+)/\rho$ 是正则的.又 $(S,+)/\rho$ 的幂等元是 e^ρ 的形式, $e\in E^{[+]},\forall e,f\in E^{[+]}$ 由文献[3]有 $V(e+f)=E(e+f)=E(f+e)=V(f+e)\Rightarrow (e+f,f+e)\in \rho\Rightarrow e^\rho+f^\rho=f^\rho+e^\rho$ 即 $(S,+)/\rho$ 中的幂等元可换,由文献[3]结论 $(S,+)/\rho$ 是逆半群.则 ρ 是逆半群同余,所以 ρ 是加法可逆双半环同余.最后,同定理1可证得 ρ 的最小性.

参考文献:

[1] 谢祥云,等.关于双半环[J].兰州大学学报(自然科学版),1995,31(4):16~21.
[2] SUN Yongli. Congruences on Some Quasi-Completely Regular Semirings. [J]. 北京大学学报(自然科学版),2004,40(5).
[3] J. M. Howie. An introduction to Semigroup Theory. London: Academic Press, 1976.
[4] J. S. Golan. The Theory of Semirings with Application in Mathematics and Theoretical Computer Science [J]. Pitman Monographs and Surveys in Pure Applied Mathematics, Vol. 54, Longman, New York, 1992.
[5] 陈培慈. 半环理论与语言和自动机[M]. 南昌:江西高校出版社,1993.

Some Congruences on Bi-semirings and Properties

ZHANG Wei, ZUO Liming, WANG Song-sheng, QU Cong

(Institute of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China)

Abstract: In this paper, some congruences on bi-semirings have been studied. The bi-semiring congruences are characterized by their additive semigroups. Some profound properties for the bi-semiring congruence are obtained.

Key words: bi-semiring; inverse semigroup congruence; bi-semiring congruence; group congruence; ideal

(上接第 149 页)

$$H_N=S_{N_{n-1}}(\prod_{i=n-2}^1(I_{\prod_{j=1+1}^{n-1}p_j}\otimes S_{N_i})(I_{\prod_{i=n-1}^1p_i}\otimes H_0)$$

(16)

参考文献:

[1] 张其善,张有光.桥函数理论及其应用[M].北京:国防工业出版社,1992.
[2] 饶雪芳,张其善.广义桥函数理论及其应用[M].北京:国防工业出版社,1998.
[3] 李 青,王能超.快速 Walsh 变换的二分算法[J].中山大

学学报论丛,1996,5,12-15.
[4] 施保昌,郭照立,王能超.斜 Haar 类变换的演化生成和快速算法[J].计算数学,2003,1(1): 1~7.
[5] 刘向华.广义 Walsh 函数的演化生成及其快速算法[硕士学位论文].华中科技大学图书馆,2001.
[6] 张其善,王 钢,金明录.信号的复制生成理论及其在通信中的应用[J].航空学报(增),2001,22,s30-s33.
[7] 张公礼,潘爱玲.数字谱方法的理论与应用[M].北京:国防工业出版社,1992.
[8] 张其善,张凤元,吴今培.混合进制广义沃尔什函数的复制生成[J].电子学报,2001,29:1944-1946.

Fast Algorithms of Generalized Walsh Function for Hybrid Carry System

WANG Guang-chao, LIAO Guo-yong

(School of Natural Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: By using the techniques of matrix analysis, a new copy method of generalized Walsh function for hybrid carry system is proposed and two fast algorithms are designed in the paper.

Key words: Walsh function; hybrid carry system; matrix copy theory; fast algorithm